Universidade de São Paulo
Escola de Artes,Ciências e Humanidade
-EACH

Projeto Ensinar com Pesquisa
Relatório Final

Orientador:Prof. Dr. Antônio Calixto de
Souza Filho, ciente

Pesquisadora: Elisabeth Pinheiro
São Paulo
2012

Material Didático para Ensino- Aprendizagem de Tópicos em Matemática

O Problema de FIBONACCI do Quadrado Racional

RESUMO: O trabalho propõe a produção de um material didático, para ensino-aprendizagem de matemática, sobre o Problema de Fibonacci: determinar um número cujo quadrado, somado ou subtraido de 5, resulte em outro quadrado. O público alvo são alunos do ensino fundamental, médio ou superior. Neste trabalho apresentamos e analisamos a solução do problema proposta por Fibonacci, bem como desenvolvemos uma formulação equivalente à formulação de Fibonacci, porém restrita a números inteiros.

Sumário

1 Introdução

Para o problema de Fibonacci que estudamos, destacamos duas diferentes formas de enunciá-lo, com grau de dificuldade decrescente. Tais formulações, que são equivalentes, são possíveis apenas a partir de desenvolvimentos matemáticos.

Assim o problema original, proposto por Fibonacci, é enunciado na forma:

> *determinar um número que de seu quadrado, somando ou diminuindo* 5*, resulte em ambos quadrados*,[5]

Ao longo do trabalho, vamos nos referir a este problema por *Problema do Quadrado Racional*, com a seguinte interpretação algébrica.

Sejam r, s, t os números do enunciado.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} r^2 & + & 5 & = & s^2 \\ r^2 & - & 5 & = & t^2 \end{array}\right. \tag{1}$$

Obviamente, denotando-se $|r|$ pelo módulo de r, se $|r| > \sqrt{5}$, então $r^2 - 5 > 0$, portanto o problema tem soluções reais. O problema torna-se, portanto, não trivial quando as soluções procuradas sejam números não irracionais. A formulação acima, proposta por Fibonacci, é o modo mais geral de enunciar o problema, pois não especifica nenhuma propriedade para o número procurado. Desse modo, uma formulação não trivial do problema é a seguinte:

> *achar um número racional tal que se somar, ou subtrair, cinco do quadrado do número, o resultado seja o quadrado de um número racional*, [1, pág. 175]

Na seção 3, mostramos que r, s, t não são números inteiros. Veremos que tal formulação pode ser obtida, observando-se que o menor triângulo retângulo de lados inteiros tem área 6, enquanto que o problema do quadrado racional original equivale a construir um triângulo retângulo de área 5 o qual r é um dos catetos, veja o capítulo 1 de [6]. Logo r não é um número inteiro.

Utilizando agora o fato que r, s, t devem ser racionais, com alguns conceitos básicos de aritmética, mostramos que as soluções do problema do quadrado racional, podem ser obtidas a partir das soluções do seguinte problema:

> encontrar um número inteiro quadrado que somado ou subtraindo de um quíntuplo quadrado resulta em ambos inteiros quadrados

A formulação algébrica fica:

$$\begin{cases} m^2 + 5n^2 = p^2 \\ m^2 - 5n^2 = u^2 \end{cases} \tag{2}$$

Neste caso, dizemos que a resolução do problema do quadrado racional é equivalente a resolução do problema acima. Nesse sentido, dizemos que os problemas têm formulações equivalentes.

O trabalho será apresentado da seguinte maneira. Na seção 2 tratamos dos aspectos históricos do periodo de vida de Fibonacci. Na seção 3 discutimos aspectos da formulação do problema do quadrado racional, relacionados à formulação do problema. Na seção 3.4, propomos a formulação acima equivalente ao problema de Fibonacci do quadrado racional, cujas soluções, quando existem, são números inteiros. Na seção 4, apresentamos e analisamos a solução proposta por Fibonacci. A seção 5 trata do caso mais geral do problema de Fibonacci, ou seja *determinar um número que de seu quadrado, somando ou diminuindo f, resulte em ambos quadrados*, em que, a partir das idéias contidas na solução de Fibonacci de seu problema, determinamos quando $f = 41$ e mostramos que, até o momento, não sabemos se existe solução quando $f = 11$.

2 Falando Um Pouco Sobre Fibonacci

Inicialmente, abordamos o contexto histórico do período em que viveu Fibonacci, também conhecido por *Idade Média*, a fim de compreender o lugar e seus aspectos sociais e culturais, assim como quem foi Fibonacci. Com isso, contextualizaremos a vida e as obras deste autor que contribuíram para a história da matemática, [1].

2.1 Aspectos Históricos da Idade Média

Ocorreram varias mudanças no campo da politica, na área social e na área intelectual entre o século XII e XIII. Entre as invações barbaras e a Idade das Trevas, que nascia a Europa[4], e não se podia ouvir nada erudito, apenas na Inglaterra sobre que matemática usar para o calendário eclesiástico e como representar números através dos dedos.[1]

Era uma época a qual os melhoramentos de técnicas da agricultura contribuíam ao crescimento de produção de alimentos e assim para o crescimento populacional, para produção comercial e abrindo espaço para consequente crescimento científico, industrial e tecnológico.[4]

Tornaram-se autônomas as repúblicas nas cidades Italianas, por causa da luta entre o Sacro Império Romano e o Papado, isso ocorreu entre o final do século XII. Nesta época navios de Veneza e Génova auxiliavam a expansão do comércio, sendo assim conhecidas como as capitais de pequenos impérios.[4]

Quem não participava de uma corporação não poderia trabalhar em oficio algum na cidade. O crescimento das cidades era lento, mas mesmo assim expandiam-se. Utilizavam animais como força de tração, a imprensa surgia como um meio de divulgação, e com tais mudanças o comércio entre burgos e feudos aumentava. Com os burgueses de diferentes aldeias ficando ricos, houve disputas de terras entre os senhores feudais e os burgueses. Com isso as cidades foram se tornando independentes, isso no século XIII, os burgueses acabaram de um jeito revolucionário com as instituições feudais, passando a ser considerados como a classe mais rica e poderosa naquele tempo.[2]

Pisa na Idade Média era conhecida como o centro comercial mais importante da Itália, atualmente é mais conhecido pela torre inclinada "Torre de Pisa".[4]

Em meio a esse contexto, viveu Fibonacci que viajava conforme o pai fazia negócios.

2.2 Leonardo Pisano: o Fibonacci

Leonardo Pisano nasceu por volta de 1175, em Pisa, na Itália, segundo Horadam era filho de Gulielmus (William) um comerciante. Leonardo ficou conhecido como Leonardo de Pisa, Leonardo Bigollo (Leonardo Viajante) ou Fibonacci que quer dizer filho de Bonacci.[4]

Como seu pai era comerciante, e possuía negócios no norte da África, teve como professor um muçulmano. Com as viagens que o pai fazia ao Egito, Síria e Grécia, foi conhecendo os números arábicos (sistema numérico hindu-arábico) e notou que eram diferentes em comparação ao sistema numérico romano. Estudou geometria e álgebra lendo as obras de Diofante de Alexandria.[3]

Segundo [5], Foi um dos mais promissores matemáticos Italianos e produziu obras como: Liber abaci ou Livro do ábaco (1202) onde falava das descobertas sobre os números árabes e os algarismos, Practica geometriae ou Prática geométrica (1220), e Flos ou Flor (1225) e Liber quadratorum ou Livro dos números quadrados (1225). De fato, no início do século XX, temos a seguinte referencia a respeito dele, bem como a importância em difundir suas obras:

The other works of Leonardo of Pisa that are known are Flos, a Letter to Magister Theodorus, and the Liber Quadratorum. These three works are so original and instructive, and show so well the remarkable genius of this brilliant mathematician of the thirteenth century, that it is highly desirable that they be made available in English translation

A reputação de Fibonacci como grande matemático chamou a atenção do Imperador Santo Frederick II ou Stuper Mundi (Maravilha do Mundo)[4] o rei das duas Sicílias. O Imperador Frederick tinha interesse de incentivar a aprendizagem de qualquer natureza, mas gostava mais de matemática e ciências,[4]. Então Frederick II realizou uma festa em Palermo, e nas quais fazia competições de problemas matemáticos e Fibonacci foi convidado,[1]. Nesta festa, o seguinte problema foi proposto pelo estudioso John de Palermo(João de Palermo).[4]

O problema a ser solucionado por Fibonacci era *determinar um número que de seu quadrado, somando ou diminuindo* 5*, resulte em ambos quadrados*,[5]. O problema está em suas obras: Flos e no Liber quadratorum, mas apenas no Liber quadratorum há solução do problema, com a utilização das obras de Diofante na qual já era usada pelos árabes. [1]

O livro Practica geometriae baseia-se na obra de Euclides "Divisão de figuras"(atualmente desaparecida), e nas obras de Heron e o teorema de Pitágoras. No livro são resolvidos problemas geométricos com álgebra. [1]

Ainda não se sabe ao certo como Fibonacci morreu, mas foi por volta de 1250. Também não se sabe se havia casado ou se tivera um filho, porque foram perdidas essas informações, mas era um matemático fabuloso. Em Pisa, os cidadãos ergueram uma estátua de Fibonacci no Scotto Giardina.

Aparentemente esquecido atualmente, é um matemático muito à frente do seu tempo, considerado um gênio na teoria dos números naquele período segundo[4], como destacamos abaixo.

The most outstanding Western mathematician of the Middle Ages and a man very much in advance of his time.

A seguir enunciamos um problema solucionado por Fibonacci, proposto, como já mencionado, pelo estudioso John de Palermo. O problema tem sido objeto da atenção por muitos matemáticos.

3 Problema Escolhido e Desenvolvimento da Solução

O problema que vamos considerar trata da determinação de um número o qual somado ou subtraido 5 de seu quadrado o resultado seja um número quadrado. Em [1], este problema é enunciado de um modo diferente, em que fica explicitado que o número procurado é um número racional. Segundo Boyer, [1], o problema

... assemelha-se notavelmente ao do tipo com que Diofante se deliciava: achar um número racional tal que se somar ou subtrair cinco do quadrado do número, o resultado seja o quadrado de um número racional.

Se mostrarmos que o número procurado por Fibonacci não pode ser um número inteiro, então, o modo como Fibonacci enuncia seu problema é equivalente ao modo como Boyer o registra em [1]. Obviamente, não estamos considerando o caso trivial da solução em que o número seja um real não racional ou que o quadrado deste número, somado ou subtraído de 5 não resulte em um racional quadrado. Por exemplo, se $r = 3$, então $s = \sqrt{14}$ e $t = 2$.

A partir do enunciado acima, consideramos um número racional $r = \frac{m}{n}$, cujo quadrado somado ou subtraindo de 5, resulte em um número racional quadrado, segundo a equação 1, $s = \frac{p}{q}$ e $t = \frac{u}{v}$. Ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\frac{m}{n})^2 + 5 & = & (\frac{p}{q})^2 \\ (\frac{m}{n})^2 - 5 & = & (\frac{u}{v})^2 \end{array} \right. \tag{3}$$

Este problema equivale a encontrar um triângulo retângulo de área igual a 5, que não tem lados inteiros. Isso porque o menor triângulo retângulo cujos lados são números inteiros é o triângulo de catetos 3 e 4 cuja área é igual a 6. Com efeito Área$=\frac{b \cdot a}{2} = 3.\frac{4}{2} = 6$

Então, para um triângulo retângulo de área 5, seus lados não são números inteiros. Pode ser racional? Sim, a seguir, também mostramos que a determinação de um triângulo retângulo de lados racionais cuja área é $f = 5$, corresponde a solução do problema de Fibonacci.

3.1 Um Problema de Teoria dos Números e Geometria

Sejam a, b os catetos e h a hipotenusa de um triângulo retângulo de área 5. Sua área é dada por $\frac{b \cdot a}{2} = 5$, logo $b \cdot a = 10$.

Podemos utilizar o teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = h^2$, e o valor conhecido para a área do triângulo $a \cdot b = 10$ e assim determinar as possíveis relações entre os catetos a, b e a hipotenusa h, a partir dos seguintes passos:

Primeiro, completamos o quadrado na expressão $a^2 + b^2 = h^2$. É comum escrever expressões do tipo $a^2 + b^2$ na forma $(a \pm b)^2 \mp x$, em que x é o termo que completa o quadrado do binômio $a^2 + b^2$. De modo que $x = 2ab = 20$. Ou seja $a^2 + b^2 = (a \pm b)^2 \mp 20$. Pelo Teorema de Pitágoras $h^2 = a^2 + b^2 = (a \pm b)^2 \mp 20$. Se dividirmos a equação por 4, obteremos $(\frac{h}{2})^2 = (\frac{a \pm b}{2})^2 \mp 5$.

Se definindo-se as variáveis:

$$\begin{array}{l} \frac{h}{2} = r = \frac{m}{n} \\ (\frac{a}{2} + \frac{b}{2}) = \frac{p}{q} \\ (\frac{a}{2} - \frac{b}{2}) = \frac{u}{v}, \end{array}$$

obtemos o problema proposto por Fibonacci: $\left\{ \begin{array}{lllll} (\frac{m}{n})^2 & + & 5 & = & (\frac{p}{q})^2 \\ (\frac{m}{n})^2 & - & 5 & = & (\frac{u}{v})^2 \end{array} \right.$.

Resumindo, se $\left\{ \begin{array}{lllll} r^2 & + & 5 & = & (\frac{p}{q})^2 \\ r^2 & - & 5 & = & (\frac{u}{v})^2 \end{array} \right.$, a solução deste sistema de equações equivale à determinação de um triângulo retângulo de área 5, isto é, seus catetos são $a = \frac{p}{q} + \frac{u}{v}$ e $b = \frac{p}{q} - \frac{u}{v}$.

A seguir, apresentamos um problema equivalente ao problema proposto por Fibonacci, no sentido que as soluções de um dos problemas determina a solução a solução do outro, cujas soluções são números inteiros. Para tanto, consideramos o sistema 3 e eliminamos os denominadores, de maneira que obtemos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{lllll} (mq)^2 & + & 5(nq)^2 & = & (pn)^2 \\ (mv)^2 & - & 5(nv)^2 & = & (un)^2 \end{array} \right. \tag{4}$$

As equações de cada linha deste sistema, também são conhecidas por equações diofantinas inteiras. Utilizando propriedades de divisibilidade dos inteiros, veremos que é possível reduzir o número de incógnitas do sistema 5, quando a solução procurada fica restrita ao conjunto dos números inteiros. Assim, veremos que $n = q = v$, permitindo obter de modo mais simples a solução do problema de Fibonacci. É importante observar que a solução proposta por Fibonacci, [5, Proposition XV], parece considerar esta redução.

3.2 Divisibilidade

Se a e b são números inteiros, a é múltiplo de b se existe um número inteiro k tal que $a = k * b$. Sendo assim 10 é múltiplo de 5 porque $10 = 2 * 5$. Já um múltiplo de zero é ele mesmo, mas zero pode ser múltiplo de todos números. Outro fato é que todos os números são múltiplos de 1(um) e de si mesmo.

Os números inteiros que são múltiplos de 2(dois) são os pares, sendo assim os demais são os ímpares.

Uma propriedade importante é que a soma ou diferença de dois múltiplos de um número, são também múltiplos deste número.

Semelhante ao conceito de múltiplo, temos o conceito de divisibilidade. Dados dois números inteiros $a \neq 0$ e b , dizemos que a divide b, quando existe um inteiro k, tal que, $b = k * a$, ou seja, b é um múltiplo de a. Denotamos a divide b pela simbologia $a \mid b$.

Observe que se $a \mid b$ (portanto $b = ka$) e $b \mid c$ (portanto $c = qb$), então $a \mid c$, isso decorre do seguinte fato, $b = ka$ e $c = qb$, então $c = q(ka) = (qk)a = k'a$, logo c é múltiplo de a, portanto $a \mid c$. Esta propriedade é conhecida por *propriedade transitiva da divisibilidade.*

Para a divisibilidade, temos as seguintes propriedades, que podem ser verificadas de modo análogo à propriedade transitiva:

(1) 1 divide qualquer número, ou seja, $1 \mid a$, $a \in \mathbb{Z}$.

(2) $a \mid a$, $a \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$.

(3) $a \mid 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

(4) Se $a \mid b$, então $|a| \leq |b|$, $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0 \neq b$.

(5) Se $d \mid (a + b)$ e $d \mid a$ então $d \mid b$.

Com o conceito de divisibilidade, podemos definir o conceito de número primo. Se a é um número inteiro positivo, ou ocorre que os únicos divisores positivos de a são 1 e o próprio a, ou ocorre que a possui outros divisores positivos próprios, isto é, diferentes de 1 e de a. No primeiro caso, a é chamado de número primo, no segundo a é chamado de número composto e qualquer divisor próprio de a um fator de a.

Seja a um número inteiro. Denotamos o conjunto $div(a) = \{i \in \mathbb{Z}^+$, tal que, $i \mid a\}$, isto é, o conjunto dos números inteiros positivos que são divisores de a. Lemos $div(a)$ como o conjunto dos divisores positivos de a. Por exemplo, $div(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Dado um conjunto A, denotamos por $max(A)$ o maior elemento do conjunto A. Pela propriedade 4, acima, $|a| = max(div(a))$, ou seja, $div(a)$ tem como maior elemento do conjunto o número $|a|$. Portanto, $div(a)$ é um conjunto finito, para todo $a \in \mathbb{Z}$. O conjunto $div(a)$ tem várias propriedades importantes, uma delas é que os elementos do $div(a)$ que são potências cuja base é um número primo e de maior expoente são suficientes para determinar qualquer número inteiro a. Este resultado é consequência do Teorema Fundamental da Aritmética, que enunciamos a seguir.

Teorema 1 (Teorema Fundamental da Aritmética)**.** *Se $a \in \mathbb{Z}^*$, $-1 \neq a \neq 1$, então*

$$a = \pm p_1^{e_1} * p_2^{e_2} * \cdots * p_i^{e_i},$$

o produto das potências dos números primos p_i que são elementos do conjunto $div(a)$ com o maior expoente $e_i \geq 1$, sendo i a quantidade de números primos do conjunto $div(a)$.

O Teorema Fundamental da Aritmética diz, portanto, que todo número inteiro a, diferente de -1,0 e 1, é o produto das i potências que aparecem no conjunto dos divisores positivos de a cuja base é um número primo e com o maior expoente, sendo i a quantidade de primos do conjunto $div(a)$.

Por exemplo $2^2 = 4$ e 3 são as potências do $div(12)$ cuja base é um número primo e de maior expoente. Assim $12 = 2^2 * 3$. O número $a = 630$, tem $2, 3, 5, 7 \in div(630)$, os únicos primos do conjunto, e 3 o único primo cujo expoente é $2 > 1$. Assim, $630 = 2 * 3^2 * 5 * 7$.

Dados dois inteiros positivos a, b, definimos o máximo divisor comum entre a, b, que denotamos por $MDC(a, b)$ o número $max(div(a) \cap div(b))$, ou seja o maior inteiro positivo $d = MDC(a, b)$ que divide o número a e o número b, isto é, $\left\{ \begin{array}{ccc} d & | & a \\ d & | & b \end{array} \right.$ e d é o maior inteiro com esta propriedade. Por exemplo, $MDC(18, 56) = 2$, pois $div(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $div(56) = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$. Logo $div(18) \cap div(56) = \{1, 2\}$, cujo elemento máximo é 2.

Pela propriedade 1, acima, $1 \in div(a) \cap div(b)$, para quaiquer inteiros positivos a, b, assim $MDC(a, b) \geq 1$. Se $MDC(a, b) = 1$, então dizemos que a e b são relativamente primos.

É importante lembrar a definição de número racional. Isto é, $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ e $MDC(a, b) = MDC(p, q) = 1$ se, e somente se, $a = p$ e $b = q$. Neste caso o número $\frac{a}{b}$ é denominado fração irredutível. É fácil ver que toda fração $\frac{i}{j}$ pode ser representada pela sua fração irredutível. Para ver isso, basta calcular $MDC(i, j) = d$, temos $d \mid i$, portanto $i = x * d$, da mesma forma $j = y * d$, como $d \neq 0$ é o maior divisor comum entre i e j, deve ocorrer que $MDC(x, y) = 1$. Deste modo $\frac{i}{j} = \frac{x*d}{y*d} = \frac{x}{y}$ e a fração $\frac{x}{y}$ é irredutível.

Enfatizamos que este trabalho trata do problema do quadrado racional. Assim, veremos que é importante compreender algumas propriedades de um número inteiro positivo n que é um quadrado, isto é, $n = x^2$, para algum inteiro x. Tal número será denominado por inteiro positivo quadrado.

Uma propriedade importante, para um inteiro positivo quadrado x^2 é que se $y \in div(x^2)$ e y é uma potência de um número primo, então o maior expoente de y é um número par. Tal fato é de simples verificação, sabemos que $x = \pm p_1^{e1} * p_2^{e2} * \cdots * p_i^{e_i}$, assim $x^2 = p_1^{2e_1} * p_2^{2e_2} * \cdots * p_i^{2e_i}$, sendo y a potência de um primo p, o maior expoente de $p \in \{p_1, p_2, \cdots, p_i\}$ é $2e$, sendo $e \in \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$.

Outra propriedade é que se $y \in div(x^2)$ é um número composto, então existem inteiros a, b, $1 \neq a \in div(x)$ ou $1 \neq b \in div(x)$, tal que $y = a * b$. Verificamos isso, observando que se um primo p divide y, então pela propriedade transitiva $p \mid x^2 = p_1^{2e_1} * p_2^{2e_2} * \cdots * p_i^{2e_i}$, logo $p \in \{p_1, p_2, \cdots, p_i\}$, portanto $p \mid x$. Assim $y = kp$ e uma possibilidade é $a = p$ ou $b = p$, o que verifica a existência destes inteiros. Uma condição em que ou $a \mid x$ ou $b \mid x$ é $x^2 = (12)^2 = 2^6 * 3^2$ e $y = 2^4 * 3$; $y = 16 * 3 = 48$ divide 144, existem $a = 3$ e $b = 16$ tal que $3 = a \mid 12$ enquanto que $16 = b$ não divide 12.

Estes conceitos, são suficientes para reduzir as variáveis do sistema 5. Segundo este sistema, as variáveis são m, n, p, q, u, v. Mostramos a seguir que as variáveis $n = q = v$, reduzindo o número de variáveis a 4. Ressaltamos, mais uma vez, que esta redução já está implicitamente considerada na solução proposta por Fibonacci do problema do quadrado racional, [5, Proposition XV]. A seguir apresentamos uma forma de verificar esta possibilidade.

Seja $r = \frac{m}{n}$, com $MDC(m, n) = 1$, então se $(\frac{m}{n})^2 + 5 = (\frac{p}{q})^2$, obtemos $\frac{m^2+5n^2}{n^2} = (\frac{p}{q})^2$. Pelas propriedades de divisibilidade, podemos concluir que $MDC(m^2 + 5n^2, n^2) = 1$. Com efeito, suponha que $MDC(m^2 + 5n^2, n^2) = d$, então $d \mid (m^2 + 5n^2)$ e $d \mid n^2$. Assim, pela propriedade acima, como d divide uma soma de dois fatores e d divide um dos fatores (no caso o fator n^2 e portanto $d \mid 5n^2$), então d divide o outro fator (no caso o fator m^2), isto é $d \mid m^2$. Assim, obtivemos que $d \mid m^2$ e $d \mid n^2$. Nosso objetivo é mostrar que $d = 1$. Para isso, basta provar que $MDC(m, n) = MDC(m^2, n^2)$. Faremos isso em dois passos.

Primeiro, observamos que se $MDC(a, b) = 1$, então $MDC(a * a, b) = MDC(a^2, b) = 1$. Queremos provar que $MDC(a^2, b) = 1$. Então, vamos supor que $MDC(a^2, b) = x$ e calcular o valor de x. Pela propriedade do MDC, $\begin{cases} x & \mid & a^2 \\ x & \mid & b \end{cases}$. Ou x é um número primo, ou x é um número composto. Se x é um número primo, então $x \mid a$, pois vimos acima a maior potência de x que é elemento de $div(a^2)$ tem expoente par, logo $a^2 = i * x^{2n}$, então $x^n \mid a$, portanto $x \mid a$. Mas, neste caso, como também ocorre que $x \mid b$, então $x \leq 1 = MDC(a, b)$, o que não ocorre, porque a hipótese sobre x é que seja um número primo. Assim, concluímos que x deve ser um número composto. Existem inteiros diferentes de 1, tal que $x = i * j$ e pelo menos um deles é elemento do conjunto $div(a)$, podemos supor que seja i. Então, $1 \neq i \mid a$ e $i \mid b$, portanto $i \leq 1$. Então x não é um primo e x não é um número composto, logo $x = 1$.

Segundo, se $MDC(a^2, b) = 1$, como $MDC(a^2, b) = MDC(b, a^2)$, repetimos o resultado anterior, isto é, $MDC(b * b, a^2) = MDC(b^2, a^2) = 1$.

Desse modo, mostramos que o maior divisor comum de a^2 e b^2 é 1. Mas, vimos que $d \mid a^2$ e $d \mid b^2$, ou seja d é um divisor comum de a^2 e b^2, portanto, $d = 1$.

Para as demais frações $\frac{p}{q}$ e $\frac{u}{v}$, podemos considerá-las irredutíveis.

Assim, $MDC(m^2 + 5n^2, n^2) = MDC(p^2, q^2) = 1$ e $\frac{m^2+5n^2}{n^2} = (\frac{p}{q})^2$. Pela propriedade dos números racionais, com o fato que $\frac{p}{q}$ é irredutível, obtemos que $n = q$. Analogamente para a equação $(\frac{m}{n})^2 - 5 = (\frac{u}{v})^2$, obtemos $n = v$. E assim reduzimos o número de incógnitas do sistema 5 a 4 incógnitas.

O novo sistema obtido é

$$\begin{cases} m^2 & + & 5n^2 & = & p^2 \\ m^2 & - & 5n^2 & = & u^2 \end{cases} \tag{5}$$

Observemos que é um sistema com apenas 4 incógnitas, que são números inteiros e portanto é possível apresentar métodos mais simples para sua solução.

Seja (m, n, p, u) uma solução do sistema acima. Os números racionais procurados são: (ver equação 1)

$$r = \frac{m}{n}; \qquad s = \frac{p}{n}; \qquad t = \frac{u}{n}$$

A seguir, analisamos a solução dada por Fibonacci, no qual $(m, n, p, u) = (41, 12, 49, 31)$. Assim

$$\begin{cases} (\frac{41}{12})^2 & + & 5 & = & (\frac{49}{12})^2 \\ (\frac{41}{12})^2 & - & 5 & = & (\frac{31}{12})^2 \end{cases}$$

4 A Solução de Fibonacci

Durante a execução do trabalho, houve dificuldades em encontrar referências diretas, ou seja do próprio Fibonacci, sobre o problema e sua solução. Isso ocorre pelo fato de não termos acesso aos originais de sua obra, bem como, possivelmente, muitos dos registros originais de seus resultados terem sido perdidos ao longo do tempo.

Destacamos o artigo [5], que trata de alguns dos principais resultados de Fibonacci traduzidos do original para o inglês. Neste artigo é possível encontrar demonstrações originais de Fibonacci, uma das quais sobre o problema, que neste trabalho denominamos de *Problema do Quadrado Racional*, ver [5, PROPOSITION XV].

A seguir, analisamos a solução apresentada por Fibonacci.

4.1 Uma Identidade de Fibonacci

De um modo geral, uma identidade é a igualdade entre duas expressões matemáticas, formuladas em termos de variáveis que podem assumir valores arbitrários em um conjunto fixado. Por exemplo, $a^2 = b^2+c^2$ é uma identidade para b e c catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa a. No entanto, esta igualdade não é válida quando a, b e c são números reais. Porém a expressão $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$ é uma identidade quando a, b e c são números reais, tal identidade é denominada de quadrado da soma de um trinômio.

Para solução do sistema 5, Fibonacci considera as seguintes identidades, válidas para o conjunto dos números reais:

$$(x^2+y^2)^2 \quad + \quad 4xy(x^2-y^2) \quad = \quad (x^2+2xy-y^2)^2 \tag{6}$$

$$(x^2+y^2)^2 \quad - \quad 4xy(x^2-y^2) \quad = \quad (y^2+2xy-x^2)^2 \tag{7}$$

Antes de prosseguirmos mostramos que as expressões acima são de fato duas identidades.

É fácil verificar que $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ é uma identidade. Podemos aplicá-la ao primeiro termo da identidade 6, e aplicar a propriedade distributiva para o segundo termo, obtendo $(x^2)^2+2x^2y^2+(y^2)^2+4x^3y-4xy^3$. Observe que com esta simplificação tal termo ficará semelhante ao quadrado da soma de um trinômio, quando a expressão tem explícita a soma de três quadrados. Assim adicionamos $2x^2y^2$ ao termo $2x^2y^2$ e, para não alterar a expressão, subtraimos $2x^2y^2$. Obtemos: $((x^2)^2+(2xy)^2+(y^2)^2+4x^3y-4xy^3)-2x^2y^2$, que pela identidade do quadrado da soma do trinômio resulta na identidade 6. Analogamente, obtemos a identidade 7.

Outro resultado original de Fibonacci é a Proposição [5, PROPOSITION XII], segundo a qual o termo $4xy(x^2-y^2)$ é divisivel por 24, para quaisquer números inteiros x, y, ou seja um *côngruo*. Se for possível encontrar valores adequados de x, y nas identidades acima, então, conforme mostra Fibonacci, é possível obter a solução para o problema do quadrado racional, quando o côngruo for o quíntuplo de um quadrado. Isso ocorre porque, em cada identidade, os demais termos são inteiros quadrados. Desse modo, com um adequado controle do côngruo, obtemos uma solução.

Fibonacci mostra que é possível obter uma solução para o problema identificando quais valores de x e y resultam no côngruo $4xy(x^2-y^2) = 24k$ um número que seja da forma $5i^2$. Assim, ele observa 720 é um côngruo com esta propriedade, $720 = 5*(12)^2$. Desse modo, $x = 5$ e $y = 4$ satisfazem a relação do côngruo e determinam a solução do problema do quadrado racional, uma vez que o elemento côngruo, nas identidades 6,7 está entre dois inteiros quadrado e ao mesmo tempo é o quíntuplo de $144 = (12)^2$. Assim dividindo-se cada uma das identidades por 12 obtemos os racionais do problema.

Observação 2. *A solução apresentada indica que* 720 *é o côngruo que resulta na solução do problema. Assim* $4xy(x+y)(x-y) = 720$*, logo sendo* 4 *um quadrado podemos simplificar a expressão* $xy(x+y)(x-y) = 180$*.*

Lembrando que procuramos um côngruo com fator 5*, temos que* $5 \mid xy(x+y)(x-y)$ *e* $180 = 5 * 36$*. Assim um dos fatores* x*,* y*,* $x+y$ *e* $x-y$ *deve ser* 5*. Além disso,* $x \neq y$*, de modo que* $180 = 5*36$ *deve ser fatorado em* 4 *fatores distintos. Simplificando a expressão por* 5*, então* 36 *deve ser fatorado em* 3 *fatores distintos, ou seja* $1*4*9 = 1*2*18 = 2*3*6 = 1*3*12$*. Analisando estas condições concluímos que a solução possível é* $x = 5$ *e* $y = 4$*.*

Ressaltamos que, pelo fato de 5 *ser um número primo, sempre dever ocorrer que* 5 *divide um dos fatores do côngruo* $4xy(x+y)(x-y)$*, portanto uma possível solução é quando um dos fatores é* 5*. Na seção a seguir, utilizamos esta propriedade quando* $f = 41$*.*

Também é importante observar que o número $4xy(x+y)(x-y)$*, para valores* $f \neq 5$*, pode ser negativo, portanto o mais correto é que* $|4xy(x+y)(x-y)| = fi^2$*.*

5 Outros casos do problema do quadrado racional

A partir do fato que o problema do quadrado racional é equivalente a determinar um triângulo retângulo de área 5, cujos catetos sejam números racionais, podemos considerar o problema mais geral de determinar um triângulo retângulo de área f, cujos catetos sejam números racionais.

Nesta seção, fazemos uma breve discussão para os casos $f = 41$ e $f = 11$. A partir da análise feita para a resolução do problema de Fibonacci podemos nos perguntar como poderíamos encontrar a solução para outros valores de f. A questão sobre a existência de solução para $f \in \mathbb{N}$, segundo [6] é uma questão em aberto, não sendo objeto deste trabalho abordar este problema. Porém, para $f = 41$, apresentamos uma solução, por exemplo, utilizando as idéias da Observação 2. Para $f = 11$, quando utilizamos as técnicas de Fibonacci, como apresentadas em sua demonstração inicial, é extremamente difícil, ou mesmo impossível segundo a conjectura a seguir, obter uma solução.

5.1 O caso $f = 11$

Como vimos, o problema do quadrado racional equivale a determinar um triângulo retângulo de lados racionais cuja área seja f. Segundo [6, Conjectura 1.1], quando f é um número ímpar, este problema tem solução se, e somente se, o número de soluções inteiras da equação

$$2x^2 + y^2 + 8z^2 = f, \tag{8}$$

quando z é um número ímpar, é o mesmo número de soluções inteiras, quando z é um número par.

De acordo com esta conjectura, então o caso $f = 11$ não tem solução, pois as soluções inteiras da equação acima são: $\{(\pm1, \pm1, \pm1)\}$, uma vez que a soma dos coeficientes da equação é $11 = 2 + 1 + 8$. Assim, existem soluções apenas para z ímpar o que pela conjectura implicará que o problema do quadrado racional não tem solução neste caso.

Como trata-se de uma conjectura, não podemos afirmar que não exista solução.

5.2 O caso $f = 41$

Podemos observar, na solução apresentada por Fibonacci em que $f = 5$, a particularidade da solução $x = 4$ ser menor que $f = 5$. Para $f = 41$, ocorre o mesmo, ou seja $x = 9$ e $y = 41$ resultam que o valor absoluto do côngruo seja da forma $41i^2$. Pode-se verificar que $f = 41$ é o próximo número primo, maior que 5, em que este fato ocorre. Nessas condições obtemos:

$y = 41$, $x = 9$ e $|4 * 41 * 9 * (9 + 41)(9 - 41)| = 41 * (4 * 9 * 50 * 32) = 41 * (9 * 64 * 100)$, ou seja, o côngruo é da forma $f * i^2$. Assim

(1) $\frac{m}{n} = \frac{(41^2+9^2)}{3*8*10} = \frac{1762}{240}$

(2) $\frac{p}{n} = \frac{(41^2+2*41*9-9^2)}{3*8*10} = \frac{2338}{240}$

(3) $\frac{u}{n} = \frac{|9^2+2*41*9-41^2|}{3*8*10} = \frac{862}{240}$

6 Conclusão

A proposta inicial do projeto é de produzir material didático sobre tópicos em Matemática. Encontramos na referência [1] um assunto que nos chamou a nossa atenção. Trata-se da formulação de um problema de Fibonacci, na seção intitulada "Teoria dos Números e Geometria". Nosso objetivo, a partir deste problema foi estudar como Fibonacci formulara a solução do problema. A partir da referência [6] vimos que o mesmo problema era discutido entre os exemplos que este livro utiliza para introduzir o assunto sobre curvas elípticas. Neste livro, é demonstrado que o problema de Fibonacci tem uma formulação geométrica equivalente, ou seja, determinar um triângulo retângulo de área 5. Utilizando que o menor triângulo retângulo cujos lados são números inteiros tem área 6, fica evidente que a solução do problema de Fibonacci não ocorre para números inteiros. O livro formula sua solução em termos de uma equação elíptica. Ocorre que o público alvo, também, sejam alunos do ensino médio ou fundamental. Assim, optamos por buscar em fontes disponíveis a solução apresentada pelo próprio Fibonacci. Para compreender melhor sua estratégia, utilizando conceitos de Aritmética, como Divisibilidade, foi possível reduzir a solução para os números inteiros. Assim obtivemos uma outra formulação para o *problema do quadrado racional*.

Através de pesquisas bibliográficas que tratassem dos trabalhos originais de Fibonacci, chegamos até a referência [4] e a partir deste chegamos até o artigo [5] e dessa forma achamos os trechos dos originais que ajudou a encontrar o caminho do problema.

Seguindo a idéia da solução proposta por Fibonacci, pudemos chegar a uma solução para o primo 41, cujo comportamento é semelhante ao caso do primo 5. Também, discutimos o caso para o primo 11 à luz de uma conjectura de [6].

Esperamos, assim, que este trabalho venha a despertar curiosidades em outros casos de números primos.

Referências

[1] BOYER,Carl.B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher,1974.

[2] CIVITA,Victor.*Enciclopédia do Estudante*. São Paulo: Abril Cultura, 1974.

[3] DINIZ, Geraldo L. *Biografia*. webmaster: atualizado em 18/06/2006. Disponível em:<http://www.ufmt.br/icet/matematica/geraldo/biografia.htm>. Acesso em: 04 jul 2011.

[4] HORADAM,A. F. *Eight hundred years young,* The Australian Mathematics Teacher 31 (1975).

[5] McClenon, R. B. *Leonardo of Pisa and his Liber Quadratorum.* Amer. Math. Monthly 26 (1919), no. 1, 1 – 8.

[6] WASHINGTON, Lawrence C *Elliptic Curves: number theory and criptography*, Chapman & Hall/ CRC, USA, 2003.

[7] RIBEIRO, Alessandro Jacques, MACHADO, Silvia Dias Alcântara *Equação e seus multisignificados: potencialidades para a construção do conhecimento matemático*, ZETETIKÉ-Cempem, FE-Unicamp, v. 17, n. 31, jan/jun, 2009