

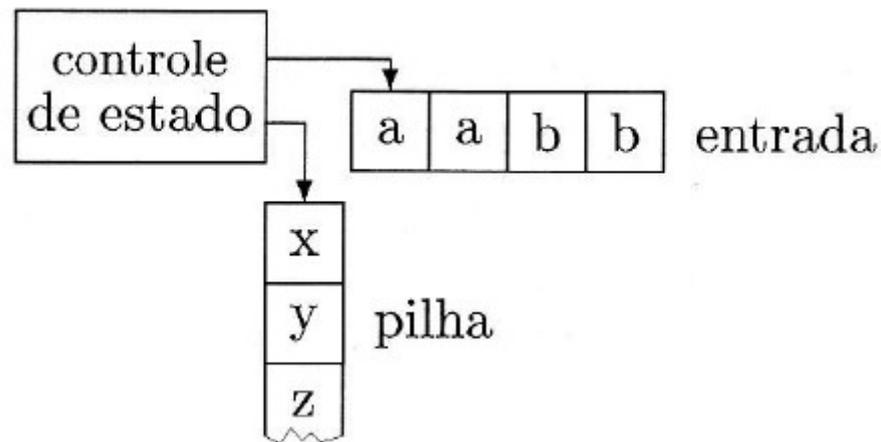
# ACH2043 INTRODUÇÃO À TEORIA DA COMPUTAÇÃO

## Aula 10

### Cap. 2.2 – Autômato com pilha (cont.)

Profa. Ariane Machado Lima  
ariane.machado@usp.br

# Cap 2.2 – Autômato com pilha (AP)



# Exemplo

$\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ . Suponha que  $M_1$  seja  $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, F)$

$$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\},$$

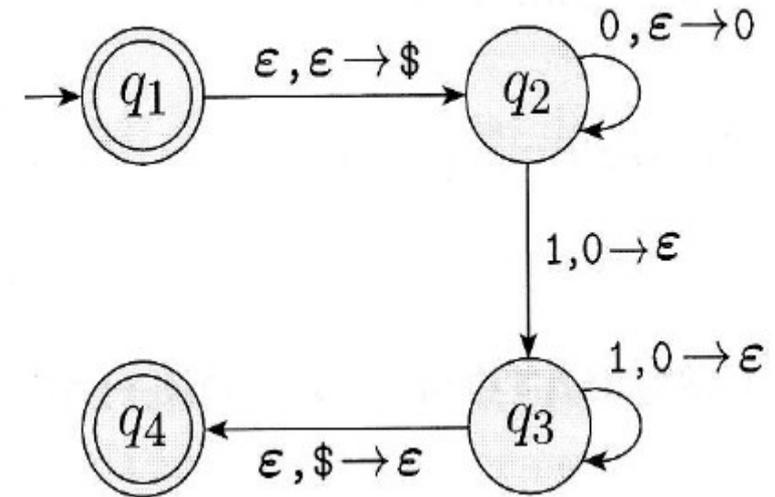
$$\Sigma = \{0, 1\},$$

$$\Gamma = \{0, \$\},$$

$$F = \{q_1, q_4\},$$

$\delta$  é dada pela tabela abaixo, na qual entradas em branco significam  $\emptyset$ .

Entrada:	0			1			$\epsilon$		
	0	\$	$\epsilon$	0	\$	$\epsilon$	0	\$	$\epsilon$
$q_1$									$\{(q_2, \$)\}$
$q_2$			$\{(q_2, 0)\}$		$\{(q_3, \epsilon)\}$				
$q_3$					$\{(q_3, \epsilon)\}$				$\{(q_4, \epsilon)\}$
$q_4$									



# Equivalência entre APN e GLC

**TEOREMA 2.20** .....

Uma linguagem é livre-do-contexto se e somente se algum autômato com pilha a reconhece.

Autômato com pilha **NÃO DETERMINÍSTICO!!!**

# Equivalência entre APN e GLC

**LEMA 2.21** .....

Se uma linguagem é livre-do-contexto, então algum autômato com pilha a reconhece.

Ideia da prova:

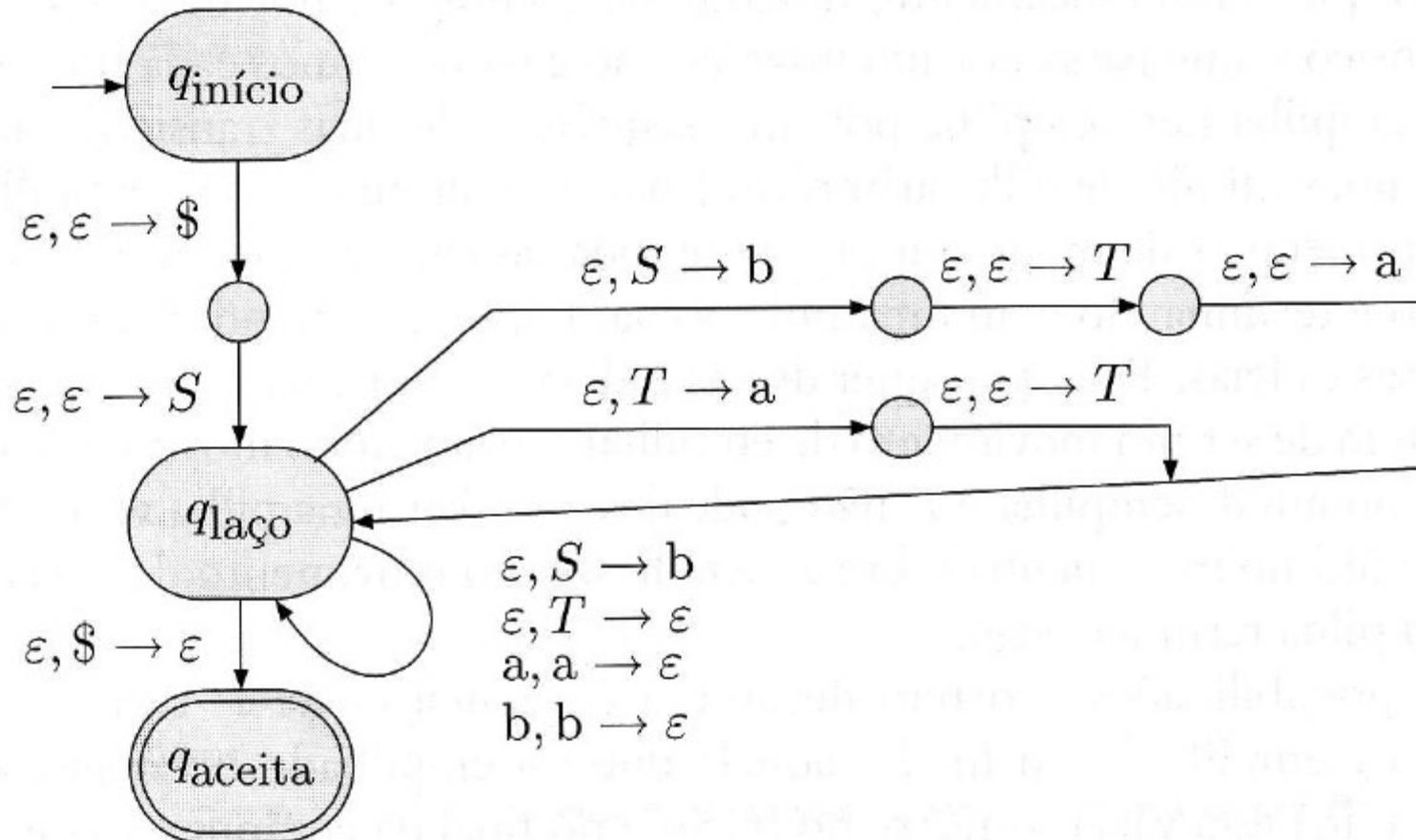
Uma LLC é gerada por uma GLC

Mostrar como converter uma GLC em um APN equivalente

# Conversão GLC em APN (ideia)

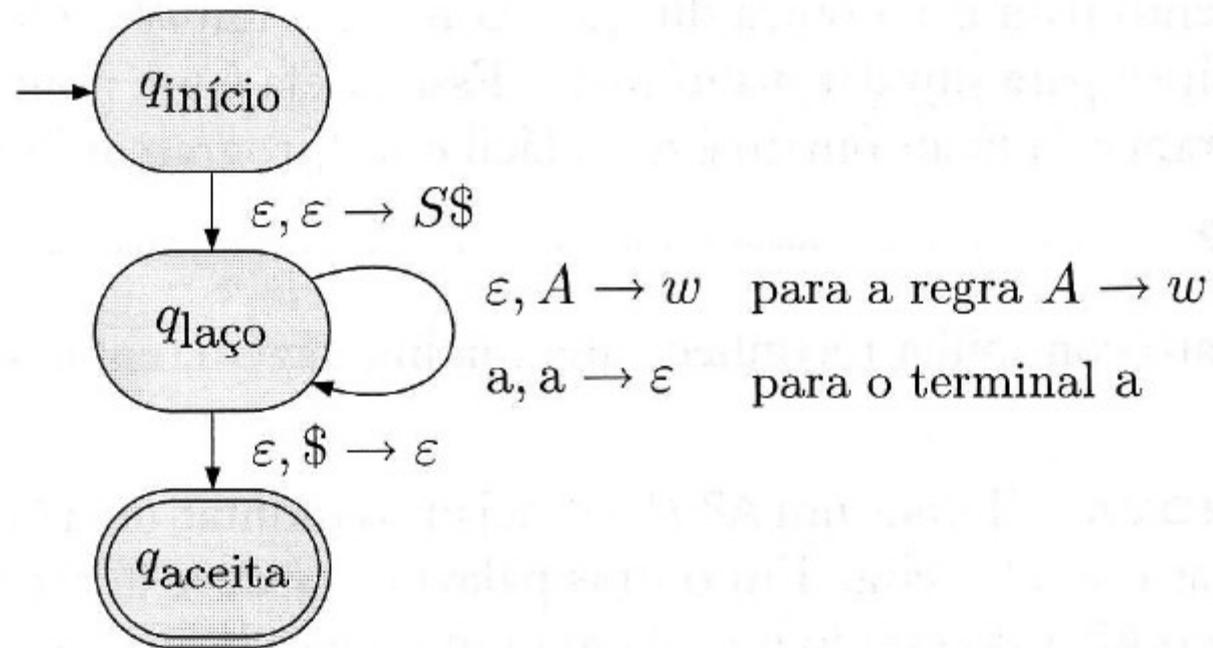
- Exemplo

$$S \rightarrow aTb \mid b$$
$$T \rightarrow Ta \mid \epsilon$$



# Conversão GLC em APN (ideia)

- Caso Geral:



# Equivalência entre APN e GLC

## TEOREMA 2.20 .....

Uma linguagem é livre-do-contexto se e somente se algum autômato com pilha a reconhece.

## LEMA 2.21 .....

Se uma linguagem é livre-do-contexto, então algum autômato com pilha a reconhece.

## LEMA 2.27 .....

Se um autômato com pilha reconhece alguma linguagem, então ela é livre-do-contexto.

# Conversão APN em GLC (ideia)

- Para facilitar, vamos considerar que o APN possui as seguintes características:
  1. Ele tem um único estado de aceitação,  $q_{aceita}$ .
  2. Ele esvazia sua pilha antes de aceitar.
  3. Cada transição ou empilha um símbolo (um movimento de *empilha*) ou desempilha um símbolo (um movimento de *desempilha*), mas não faz ambas as coisas ao mesmo tempo.

# Conversão APN em GLC (ideia)

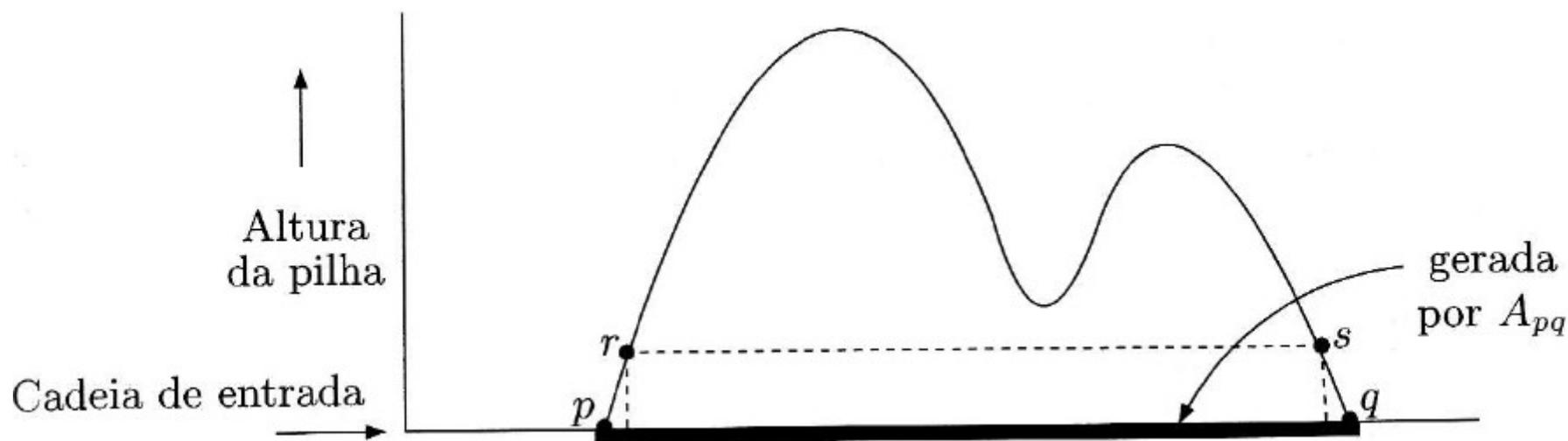
- G deve gerar uma cadeia  $x$  se  $x$  faz o APN ir do estado inicial ao estado de aceitação.
- Para cada par de estados  $(p, q)$ , criamos uma variável  $A_{pq}$  que gere todas as cadeias  $x$  que levam o APN do estado  $p$  (com uma pilha vazia) ao estado  $q$  (com uma pilha vazia).
- Neste APN:
  - no estado  $p$  (com pilha vazia), o primeiro movimento é de EMPILHA.
  - O último movimento é de DESEMPILHA (chegando no estado  $q$ , com pilha vazia)

# Conversão APN em GLC (ideia)

- No caminho de  $p$  a  $q$  (reconhecendo  $x$ ), 2 situações:
  - A pilha só se torna vazia novamente quando chega em  $q$
  - A pilha se torna vazia em algum ponto do caminho, antes de chegar em  $q$

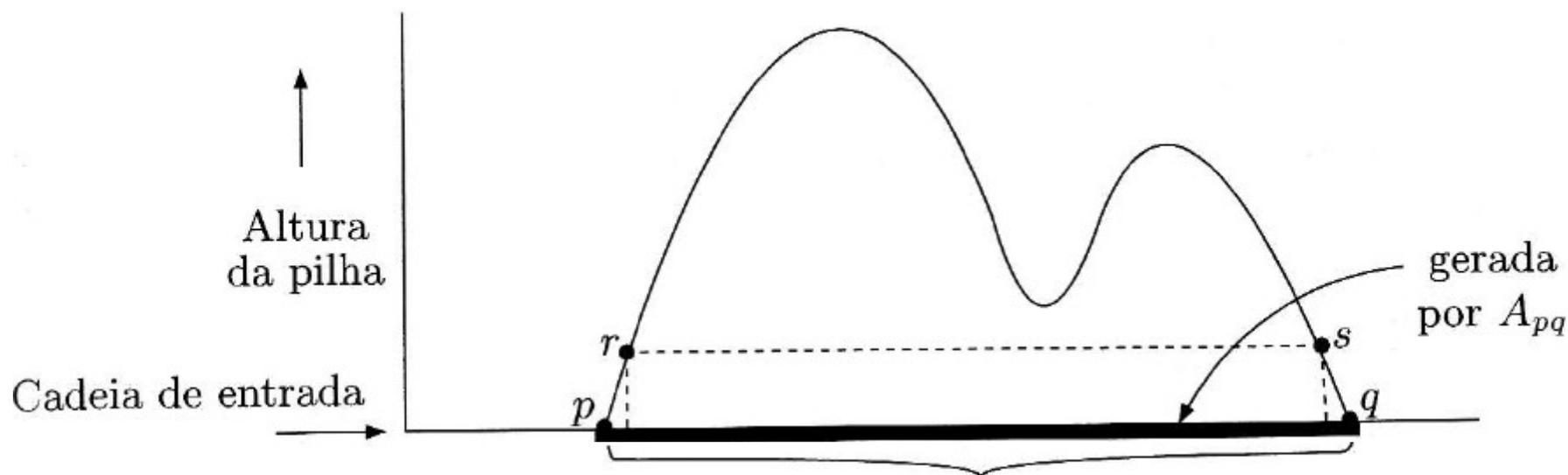
# Conversão APN em GLC (ideia)

- No caminho de  $p$  a  $q$  (reconhecendo  $x$ ), 2 situações:
  - A pilha só se torna vazia novamente quando chega em  $q$
  - A pilha se torna vazia em algum ponto do caminho, antes de chegar em  $q$



# Conversão APN em GLC (ideia)

- No caminho de  $p$  a  $q$  (reconhecendo  $x$ ), 2 situações:
  - A pilha só se torna vazia novamente quando chega em  $q$
  - A pilha se torna vazia em algum ponto do caminho, antes de chegar em  $q$



$$A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b$$

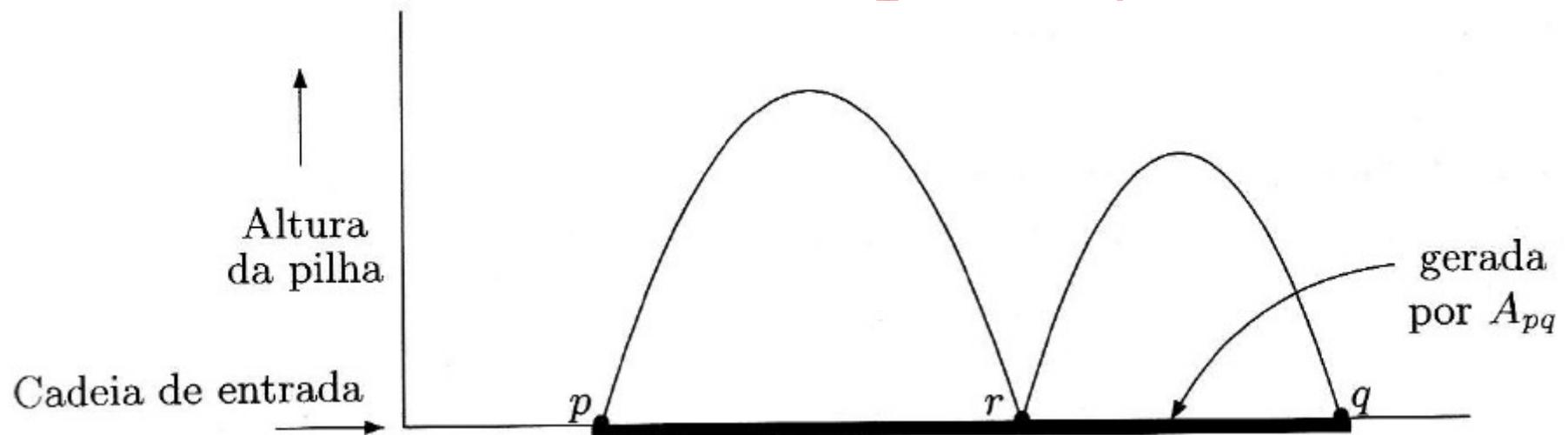
gerada  
por  $A_{rs}$

# Conversão APN em GLC (ideia)

- No caminho de  $p$  a  $q$  (reconhecendo  $x$ ), 2 situações:
  - A pilha só se torna vazia novamente quando chega em  $q$
  - A pilha se torna vazia em algum ponto do caminho, antes de chegar em  $q$

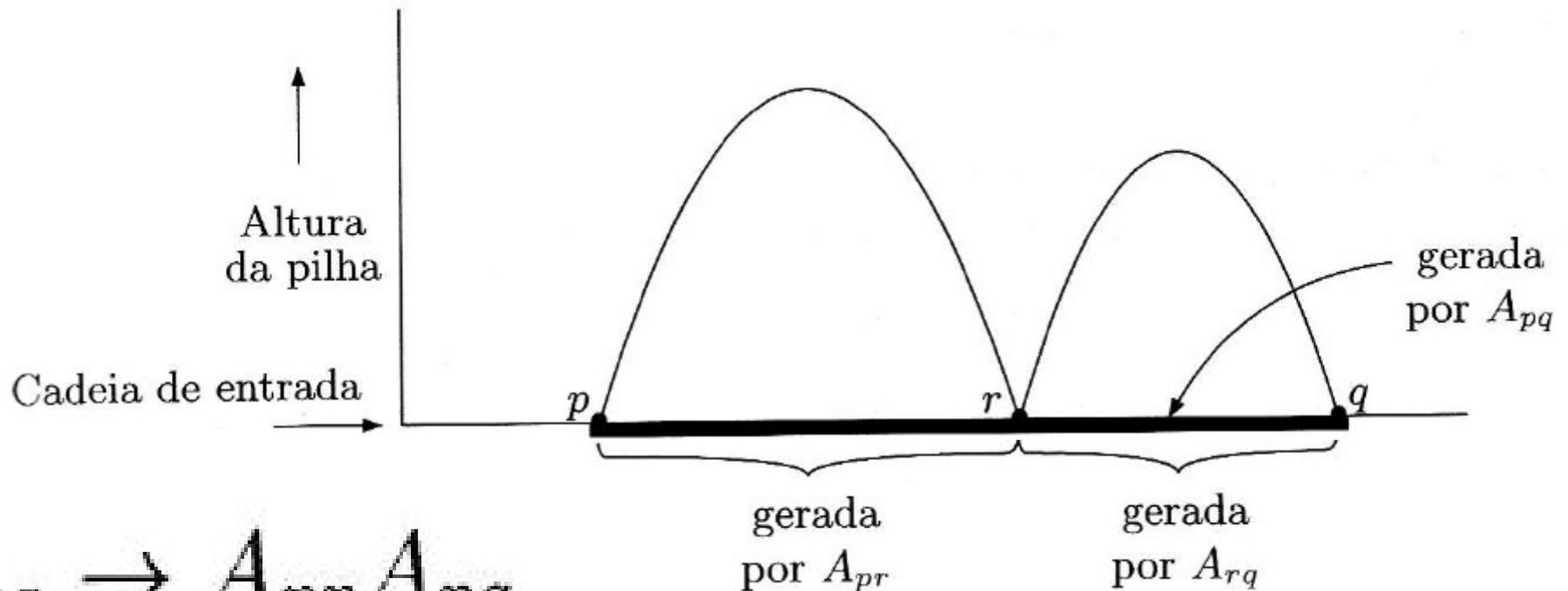
# Conversão APN em GLC (ideia)

- No caminho de  $p$  a  $q$  (reconhecendo  $x$ ), 2 situações:
  - A pilha só se torna vazia novamente quando chega em  $q$
  - **A pilha se torna vazia em algum ponto do caminho, antes de chegar em  $q$**



# Conversão APN em GLC (ideia)

- No caminho de  $p$  a  $q$  (reconhecendo  $x$ ), 2 situações:
  - A pilha só se torna vazia novamente quando chega em  $q$
  - **A pilha se torna vazia em algum ponto do caminho, antes de chegar em  $q$**



$$A_{pq} \rightarrow A_{pr} A_{rq}$$

# Conversão APN em GLC (PROVA)

**PROVA** Digamos que  $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \{q_{aceita}\})$  e vamos construir  $G$ . As variáveis de  $G$  são  $\{A_{pq} \mid p, q \in Q\}$ . A variável inicial é  $A_{q_0, q_{aceita}}$ . Agora descrevemos as regras de  $G$ .

- Para cada  $p, q, r, s \in Q$ ,  $t \in \Gamma$  e  $a, b \in \Sigma_\varepsilon$ , se  $\delta(p, a, \varepsilon)$  contém  $(r, t)$  e  $\delta(s, b, t)$  contém  $(q, \varepsilon)$ , ponha a regra  $A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b$  em  $G$ .
- Para cada  $p, q, r \in Q$ , ponha a regra  $A_{pq} \rightarrow A_{pr}A_{rq}$  em  $G$ .
- Finalmente, para cada  $p \in Q$ , ponha a regra  $A_{pp} \rightarrow \varepsilon$  em  $G$ .

# Conversão APN em GLC (PROVA)

Temos que provar que essa construção funciona, ou seja, que  $A_{pq}$  gera  $x$  se e somente se  $x$  pode levar o APN de  $p$  (com pilha vazia) a  $q$  (com pilha vazia).

**AFIRMATIVA 2.30** .....

Se  $A_{pq}$  gera  $x$ , então  $x$  pode levar  $P$  de  $p$  com pilha vazia a  $q$  com pilha vazia.

**AFIRMATIVA 2.31** .....

Se  $x$  pode levar  $P$  de  $p$  com pilha vazia para  $q$  com pilha vazia,  $A_{pq}$  gera  $x$ .

# Conversão APN em GLC (PROVA)

**AFIRMATIVA 2.30** .....

Se  $A_{pq}$  gera  $x$ , então  $x$  pode levar  $P$  de  $p$  com pilha vazia a  $q$  com pilha vazia.

Provamos essa afirmação por indução sobre o número de passos na derivação de  $x$  a partir de  $A_{pq}$ .

**Base:** A derivação tem 1 passo.

Uma derivação com um único passo tem de usar uma regra cujo lado direito não contém variáveis. As únicas regras em  $G$  onde nenhuma variável ocorre no lado direito são  $A_{pp} \rightarrow \varepsilon$ . Claramente, a entrada  $\varepsilon$  leva  $P$  de  $p$  com pilha vazia a  $p$  com pilha vazia e, portanto, a base está provada.

Se  $A_{pq}$  gera  $x$ , então  $x$  pode levar  $P$  de  $p$  com pilha vazia a  $q$  com pilha vazia.

**Passo da Indução:** Assuma verdadeiro para derivações de comprimento no máximo  $k$ , onde  $k \geq 1$ , e prove verdadeiro para derivações de comprimento  $k + 1$ . Suponha que  $A_{pq} \xRightarrow{*} x$  com  $k + 1$  passos. O primeiro passo nessa derivação é ou  $A_{pq} \Rightarrow aA_{rs}b$  ou  $A_{pq} \Rightarrow A_{pr}A_{rq}$ . Lidamos com esses dois casos separadamente.

No primeiro caso, considere a parte  $y$  de  $x$  que  $A_{rs}$  gera, de forma que  $x = ayb$ . Em razão do fato de que  $A_{rs} \xRightarrow{*} y$  com  $k$  passos, a hipótese da indução nos diz que  $P$  pode ir de  $r$  com pilha vazia para  $s$  com pilha vazia. Em razão do fato de que  $A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b$  é uma regra de  $G$ ,  $\delta(p, a, \varepsilon)$  contém  $(r, t)$  e  $\delta(s, b, t)$  contém  $(q, \varepsilon)$ , para algum símbolo de pilha  $t$ . Logo, se  $P$  começa em  $p$  com uma pilha vazia, após ler  $a$  ele pode ir para o estado  $r$  e empilhar  $t$ . Então, ler a cadeia  $y$  pode levá-lo a  $s$  e deixar  $t$  na pilha. E após ler  $b$  ele pode ir para o estado  $q$  e desempilhar  $t$ . Conseqüentemente,  $x$  pode levá-lo de  $p$  com pilha vazia para  $q$  com pilha vazia.

Se  $A_{pq}$  gera  $x$ , então  $x$  pode levar  $P$  de  $p$  com pilha vazia a  $q$  com pilha vazia.

**Passo da Indução:** Assuma verdadeiro para derivações de comprimento no máximo  $k$ , onde  $k \geq 1$ , e prove verdadeiro para derivações de comprimento  $k + 1$ . Suponha que  $A_{pq} \xRightarrow{*} x$  com  $k + 1$  passos. O primeiro passo nessa derivação é ou  $A_{pq} \Rightarrow aA_{rs}b$  ou  $A_{pq} \Rightarrow A_{pr}A_{rq}$ . Lidamos com esses dois casos separadamente.

No segundo caso, considere as partes  $y$  e  $z$  de  $x$  que  $A_{pr}$  e  $A_{rq}$ , respectivamente, geram, de forma que  $x = yz$ . Como  $A_{pr} \xRightarrow{*} y$  em no máximo  $k$  passos e  $A_{rq} \xRightarrow{*} z$  em no máximo  $k$  passos, a hipótese da indução nos diz que  $y$  pode levar  $P$  de  $p$  para  $r$  e  $z$  pode levar  $P$  de  $r$  para  $q$ , com pilha vazia no início e no final. Logo,  $x$  pode levá-lo de  $p$  com pilha vazia para  $q$  com pilha vazia. Isso completa o passo da indução.

# Conversão APN em GLC (PROVA)

**AFIRMATIVA 2.31** .....

Se  $x$  pode levar  $P$  de  $p$  com pilha vazia para  $q$  com pilha vazia,  $A_{pq}$  gera  $x$ .

Provamos essa afirmação por indução sobre o número de passos na computação de  $P$  que vai de  $p$  para  $q$  com pilhas vazias sobre a entrada  $x$ .

**Base:** A computação tem 0 passos.

Se uma computação tem 0 passos, ela começa e termina no mesmo estado — digamos,  $p$ . Portanto, temos de mostrar que  $A_{pp} \stackrel{*}{\Rightarrow} x$ . Em 0 passos,  $P$  só tem tempo de ler a cadeia vazia, portanto  $x = \varepsilon$ . Por construção,  $G$  tem a regra  $A_{pp} \rightarrow \varepsilon$ ; portanto, a base está provada.

**AFIRMATIVA 2.31** .....

Se  $x$  pode levar  $P$  de  $p$  com pilha vazia para  $q$  com pilha vazia,  $A_{pq}$  gera  $x$ .

*Passo da Indução:* Assuma verdadeiro para computações de comprimento no máximo  $k$ , onde  $k \geq 0$ , e prove verdadeiro para computações de comprimento  $k + 1$ .

Suponha que  $P$  tenha uma computação na qual  $x$  leva de  $p$  para  $q$  com pilhas vazias em  $k + 1$  passos. Ou a pilha está vazia apenas no início e no final dessa computação, ou ela se torna vazia em algum outro ponto também.

## AFIRMATIVA 2.31 .....

Se  $x$  pode levar  $P$  de  $p$  com pilha vazia para  $q$  com pilha vazia,  $A_{pq}$  gera  $x$ .

*Passo da Indução:* Assuma verdadeiro para computações de comprimento no máximo  $k$ , onde  $k \geq 0$ , e prove verdadeiro para computações de comprimento  $k + 1$ .

Suponha que  $P$  tenha uma computação na qual  $x$  leva de  $p$  para  $q$  com pilhas vazias em  $k + 1$  passos. Ou a pilha está vazia apenas no início e no final dessa computação, ou ela se torna vazia em algum outro ponto também.

### Caso 1:

- O primeiro símbolo a ser empilhado ( $t$ ) deve ser o último a ser desempilhado
- Símbolos  $a$  e  $b$  lidos da entrada no primeiro e último movimento, respectivamente
  - Segundo estado  $r$  e penúltimo estado  $s$
- $\delta(p, a, \epsilon)$  contém  $(r, t)$  e  $\delta(s, b, t)$  contém  $(q, \epsilon)$ , logo  $A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b$  está em  $G$
- $x = ayb$ .  $y$  faz o APN ir de  $r$  a  $s$ , sem tocar em  $t$ , em  $k-1$  passos
- Pela hipótese de indução,  $A_{rs} \Rightarrow^* y$ . Logo,  $A_{pq} \Rightarrow^* x$

## AFIRMATIVA 2.31 .....

Se  $x$  pode levar  $P$  de  $p$  com pilha vazia para  $q$  com pilha vazia,  $A_{pq}$  gera  $x$ .

*Passo da Indução:* Assuma verdadeiro para computações de comprimento no máximo  $k$ , onde  $k \geq 0$ , e prove verdadeiro para computações de comprimento  $k + 1$ .

Suponha que  $P$  tenha uma computação na qual  $x$  leva de  $p$  para  $q$  com pilhas vazias em  $k + 1$  passos. Ou a pilha está vazia apenas no início e no final dessa computação, ou ela se torna vazia em algum outro ponto também.

### Caso 2:

- Estado  $r$  onde a pilha fica vazia no meio da computação de  $x$
- Cada caminho (de  $p$  a  $r$ , e de  $r$  a  $q$ ) tem no máximo  $k$  passos,  $x = yz$
- Pela hipótese de indução:  $A_{pr} \Rightarrow^* y$  e  $A_{rq} \Rightarrow^* z$ .
- Como  $A_{pq} \rightarrow A_{pr} A_{rq}$  está em  $G$ ,  $A_{pq} \Rightarrow^* x$

# Equivalência entre APN e GLC

**TEOREMA 2.20** .....

Uma linguagem é livre-do-contexto se e somente se algum autômato com pilha a reconhece.

**LEMA 2.21** .....

Se uma linguagem é livre-do-contexto, então algum autômato com pilha a reconhece.

**LEMA 2.27** .....

Se um autômato com pilha reconhece alguma linguagem, então ela é livre-do-contexto.