Introdução à Teoria da Computação Exercícios

Livro: Michel Sipser, Introdução à Teoria da Computação – 2ª Ed. – Capítulo 05

EXERCÍCIOS

5.1 Mostre que EQ_{GLC} é indecidível. Dica: TODASGLC é redutível a EQGLC

5.2 Mostre que EQ_{GLC} é co-Turing-reconhecível. Dica: usar MTS do Teo 4.7

5.3 Encontre um emparelhamento na seguinte instância do Problema da Correspondência de Post.

$$\left\{ \left[\frac{\mathtt{ab}}{\mathtt{abab}}\right], \left[\frac{\mathtt{b}}{\mathtt{a}}\right], \left[\frac{\mathtt{aba}}{\mathtt{b}}\right], \left[\frac{\mathtt{aa}}{\mathtt{a}}\right] \right\}$$

5.4 Se $A \leq_m B$ e B é uma linguagem regular, isso implica que A seja uma linguagem regular? Por que ou por que não?

R**5.5** Mostre que A_{MT} não é redutível por mapeamento a V_{MT}. Em outras palavras, mostre que nenhuma função computável reduz A_{MT} a V_{MT}. (Dica: Use uma prova por contradição e fatos que você já conhece sobre A_{MT} e V_{MT}.)

R**5.6** Mostre que $\leq_m$ é uma relação transitiva.

R**5.7** Mostre que se A é Turing-reconhecível e $A \leq_m \overline{A}$, então A é decidível.

R**5.8** Na prova do Teorema 5.15 modificamos a máquina de Turing M de modo que ela nunca tente mover sua cabeça além da extremidade esquerda da fita. Suponha que não fizéssemos essa modificação a M. Modifique a construção do PCP para lidar com esse caso.

PROBLEMAS

5.9 Seja $T = \{\langle M \rangle |\ M$ é uma MT que aceita $w^{\mathcal{R}}$ sempre que ela aceita $w\}$. Mostre que T é indecidível. Dica: $A_{MT} \leq_m T$

[R]**5.10** Considere o problema de se determinar se uma máquina de Turing de duas fitas em algum momento escreve um símbolo não-branco sobre sua segunda fita quando ela é executada sobre a entrada w. Formule esse problema como uma linguagem e mostre que ele é indecidível.

[R]**5.11** Considere o problema de se determinar se uma máquina de Turing de duas fitas em algum momento escreve um símbolo não-branco sobre sua segunda fita durante o curso de sua computação sobre qualquer cadeia de entrada. Formule esse problema como uma linguagem e mostre que ele é indecidível.

5.12 Considere o problema de se determinar se uma máquina de Turing de uma única fita em algum momento escreve um símbolo branco sobre um símbolo não-branco durante o curso de sua computação sobre qualquer cadeia. Formule esse problema como uma linguagem e mostre que ele é indecidível.

5.13 Um ***estado inútil*** em uma máquina de Turing é um estado no qual a máquina nunca entra sobre qualquer que seja a entrada. Considere o problema de se determinar se uma máquina de Turing possui algum estado inútil. Formule esse problema como uma linguagem e mostre que ele é indecidível.

5.14 Considere o problema de se determinar se uma máquina de Turing M sobre uma entrada w, em algum momento, tenta mover sua cabeça para a esquerda, quando ela está sobre a célula de fita mais à esquerda. Formule esse problema como uma linguagem e mostre que ele é indecidível.

5.15 Considere o problema de se determinar se uma máquina de Turing M sobre uma entrada w tenta mover sua cabeça para a esquerda, em algum ponto, durante sua computação sobre w. Formule esse problema como uma linguagem e mostre que ele *é* decidível.

5.16 Seja $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$ o alfabeto de fita para todas as MTs neste problema. Defina a ***função do castor atarefado***[3] $CA\colon \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ como segue. Para cada valor de k, considere todas as MTs de k estados que param quando iniciadas com uma fita em branco. Seja $CA(k)$ o número máximo de 1s que ficam na fita dentre todas essas máquinas. Mostre que CA não é uma função computável.

5.17 Mostre que o Problema da Correspondência de Post é decidível sobre o alfabeto unário $\Sigma = \{1\}$.

5.18 Mostre que o Problema da Correspondência de Post é indecidível sobre o alfabeto binário $\Sigma = \{0,1\}$.

5.19 No *Problema da Correspondência de Post Bobo*, *PCPB*, em cada par, a cadeia superior tem o mesmo comprimento que a cadeia inferior. Mostre que o *PCPB* é decidível.

5.20 Prove que existe um subconjunto indecidível de $\{1\}^*$.

5.21 Seja $AMBIG_{\text{GLC}} = \{\langle G \rangle |\ G$ é uma GLC ambígua $\}$. Mostre que $AMBIG_{\text{GLC}}$ é indecidível. (Dica: Use uma redução a partir do *PCP*. Dada uma instância

$$P = \left\{ \left[\frac{t_1}{b_1}\right], \left[\frac{t_2}{b_2}\right], \ldots, \left[\frac{t_k}{b_k}\right] \right\},$$

do Problema da Correspondência de Post, construa uma GLC G com as regras

$$S \rightarrow T \mid B$$
$$T \rightarrow t_1 T \mathtt{a}_1 \mid \cdots \mid t_k T \mathtt{a}_k \mid t_1 \mathtt{a}_1 \mid \cdots \mid t_k \mathtt{a}_k$$
$$B \rightarrow b_1 B \mathtt{a}_1 \mid \cdots \mid b_k B \mathtt{a}_k \mid b_1 \mathtt{a}_1 \mid \cdots \mid b_k \mathtt{a}_k \ ,$$

onde $\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_k$ são novos símbolos terminais. Prove que essa redução funciona.)

5.22 Mostre que A é Turing-reconhecível sse $A \leq_{\mathrm{m}} A_{\mathsf{MT}}$.

5.23 Mostre que A é decidível sse $A \leq_{\mathrm{m}} 0^*1^*$.

5.24 Seja $J = \{w \mid \text{ou } w = 0x \text{ para alguma } x \in A_{\mathsf{MT}}, \text{ ou } w = 1y \text{ para alguma } y \in \overline{A_{\mathsf{MT}}}\}$. Mostre que nem J nem $\overline{J}$ é Turing-reconhecível.

5.25 Apresente um exemplo de uma linguagem indecidível B tal que $B \leq_{\mathrm{m}} \overline{B}$.

5.26 Defina um ***autômato finito de duas cabeças*** (2AFD) como um autômato finito determinístico que possui duas cabeças de somente-leitura, bidirecionais, que começam na extremidade esquerda da fita de entrada e podem ser controladas independentemente para mover em qualquer direção. A fita de um 2AFD é finita e é longa apenas o suficiente para conter a entrada mais duas células em branco adicionais, uma na extremidade esquerda e outra na extremidade direita, que servem como delimitadores. Um 2AFD aceita sua entrada entrando em um estado de aceitação especial. Por exemplo, um 2AFD pode reconhecer a linguagem $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n \mid n \geq 0\}$.

a. Seja $A_{\mathsf{2AFD}} = \{\langle M, x\rangle \mid M \text{ é um 2AFD e } M \text{ aceita } x\}$. Mostre que A_{2AFD} é decidível.

b. Seja $V_{\mathsf{2AFD}} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ é um 2AFD e } L(M) = \emptyset\}$. Mostre que V_{2AFD} não é decidível.

5.27 Um ***autômato finito bidimensional*** (AFD-2DIM) é definido como a seguir. A entrada é um retângulo $m \times n$, para quaisquer $m, n \geq 2$. Os quadrados ao longo da fronteira do retângulo contêm o símbolo **#** e os quadrados internos contêm símbolos sobre o alfabeto de entrada Σ. A função de transição é um mapeamento $Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \{\text{E, D, C, B}\}$ para indicar o próximo estado e a nova posição da cabeça (esquerda, direita, em cima, embaixo). A máquina aceita quando ela entra em um dos estados de aceitação. E rejeita se ela tenta mover para fora do retângulo de entrada ou se ela nunca pára. Duas dessas máquinas são equivalentes se elas aceitam os mesmos retângulos. Considere o problema de determinar se duas dessas máquinas são equivalentes. Formule esse problema como uma linguagem e mostre que ele é indecidível.

R★ **5.28** **Teorema de Rice**. Seja P qualquer propriedade não-trivial da linguagem de uma máquina de Turing. Prove que o problema de determinar se a linguagem de uma dada máquina de Turing tem a propriedade P é indecidível.

Em termos mais formais, seja P uma linguagem constituída de descrições de máquinas de Turing, em que P satisfaz duas condições. Primeiro, P é não-trivial — ela contém alguma descrição, mas não todas as descrições de MTs. Segundo, P é uma propriedade da linguagem da MT — quando $L(M_1) = L(M_2)$, temos que $\langle M_1\rangle \in P$ sse $\langle M_2\rangle \in P$. No caso, M_1 e M_2 são quaisquer MTs. Prove que P é uma linguagem indecidível.

5.29 Mostre que ambas as condições no Problema 5.28 são necessárias para provar que P é indecidível.

5.30 Use o teorema de Rice, que aparece no Problema 5.28, para provar a indecidibilidade de cada uma das seguintes linguagens.

[R]**a.** $INFINITA_{\mathsf{TM}} = \{\langle M\rangle \mid M$ é uma MT e $L(M)$ é uma linguagem infinita$\}$.

b. $\{\langle M\rangle \mid M$ é uma MT e $1011 \in L(M)\}$.

c. $TUDO_{\mathsf{TM}} = \{\langle M\rangle \mid M$ é uma MT e $L(M) = \Sigma^*\}$.

5.31 Seja

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{para } x \text{ ímpar} \\ x/2 & \text{para } x \text{ par} \end{cases}$$

para qualquer número natural x. Se começar com um inteiro x e iterar f, você produz uma seqüência $x, f(x), f(f(x)), \ldots$ que termina se produzir 1. Por exemplo, se $x = 17$, você obtém a seqüência 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Extensivos testes por computador mostraram que todo ponto de partida entre 1 e um grande inteiro positivo dá uma seqüência que termina em 1. No entanto, a questão de se todos os pontos de partida positivos propiciam o término em 1 não foi solucionada; ela é denominada o problema $3x + 1$.

Suponha que A_{MT} fosse decidível por uma MT H. Use H para descrever uma MT que seja garantida apresentar a resposta para o problema $3x + 1$.

5.32 Prove que as duas linguagens seguintes são indecidíveis.

a. $SOBREP_{\mathsf{GLC}} = \{\langle G, H\rangle \mid G$ e H são GLCs tais que $L(G) \cap L(H) \neq \emptyset\}$. (Dica: Adapte a dica do Problema 5.21.)

b. $LIVRE\text{-}PREF_{\mathsf{GLC}} = \{G \mid G$ é uma GLC onde $L(G)$ é livre-de-prefixo$\}$.

5.33 Seja $S = \{\langle M\rangle \mid M$ é uma MT e $L(M) = \{\langle M\rangle\}\}$. Mostre que nem S, nem $\overline{S}$ é Turing-reconhecível.

5.34 Considere o problema de determinar se um AP aceita alguma cadeia da forma $\{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$. Use o método da história de computação para mostrar que esse problema é indecidível.

5.35 Seja $X = \{\langle M, w\rangle \mid M$ é uma MT de uma única fita que nunca modifica a porção da fita que contém a entrada $w\}$. X é decidível? Prove sua resposta.

SOLUÇÕES SELECIONADAS

5.5 Suponha, para o propósito de obter uma contradição, que $A_{\mathsf{MT}} \leq_{\mathrm{m}} V_{\mathsf{MT}}$ via a redução f. Segue-se pela definição de redução por mapeamento que $\overline{A_{\mathsf{MT}}} \leq_{\mathrm{m}} \overline{V_{\mathsf{MT}}}$ via a mesma função de redução f. Entretanto, $\overline{V_{\mathsf{MT}}}$ é Turing-reconhecível e $\overline{A_{\mathsf{MT}}}$ não é Turing-reconhecível, contradizendo o Teorema 5.28.

5.6 Suponha que $A \leq_{\mathrm{m}} B$ e $B \leq_{\mathrm{m}} C$. Então, existem funções computáveis f e g tais que $x \in A \iff f(x) \in B$ e $y \in B \iff g(y) \in C$. Considere a função composta $h(x) = g(f(x))$. Podemos construir uma MT que computa h como segue: primeiro, simule uma MT para f (tal MT existe porque supusemos que f é computável) sobre a entrada x e chame a saída de y. Então, simule uma MT para g sobre y. A saída é $h(x) = g(f(x))$. Portanto, h é uma função computável. Além disso, $x \in A \iff h(x) \in C$. Logo, $A \leq_{\mathrm{m}} C$ via a função de redução h.

5.7 Suponha que $A \leq_m \overline{A}$. Então, $\overline{A} \leq_m A$ via a mesma função de redução. Como A é Turing-reconhecível, o Teorema 5.28 implica que $\overline{A}$ é Turing-reconhecível e, com isso, o Teorema 4.22 implica que A é decidível.

5.8 Você tem que lidar com o caso em que a cabeça está na célula da extremidade esquerda da fita e tenta mover para a esquerda. Para fazer isso, acrescente dominós

$$\left[\frac{\#qa}{\#rb}\right]$$

para todo $q, r \in Q$ e $a, b \in \Gamma$, onde $\delta(q, a) = (r, b, \mathrm{E})$.

5.10 Seja $B = \{\langle M, w\rangle |\ M$ é uma MT de duas fitas que escreve um símbolo não-branco na sua segunda fita quando roda $w\}$. Mostre que A_{MT} se reduz a B. Suponha, para o propósito de obter uma contradição, que a MT R decide B. Então, construa a MT S que usa R para decidir A_{MT}.

$S =$ "Sobre a entrada $\langle M, w\rangle$:

1. Use M para construir a seguinte MT de duas fitas, T.
   $T =$ "Sobre a entrada x:
   1. Simule M sobre x usando a primeira fita.
   2. Se a simulação indicar que M aceita, escreva um símbolo não-branco na segunda fita."
2. Execute R sobre $\langle T, w\rangle$ para determinar se T sobre a entrada w escreve um símbolo não-branco na sua segunda fita.
3. Se R aceita, M aceita w; portanto, *aceite*. Caso contrário, *rejeite*."

5.11 Seja $C = \{\langle M\rangle |\ M$ é uma MT de duas fitas que escreve um símbolo não-branco na sua segunda fita quando roda sobre alguma entrada$\}$. Mostre que A_{MT} se reduz a C. Suponha, para o propósito de obter uma contradição, que a MT R decide C. Então, construa a MT S que usa R para decidir A_{MT}.

$S =$ "Sobre a entrada $\langle M, w\rangle$:

1. Use M e w para construir a seguinte MT de duas fitas, T_w.
   $T_w =$ "Sobre qualquer entrada:
   1. Simule M sobre w usando a primeira fita.
   2. Se a simulação indicar que M aceita, escreva um símbolo não-branco na segunda fita."
2. Execute R sobre $\langle T_w\rangle$ para determinar se T_w, em algum momento, escreve um símbolo não-branco na sua segunda fita.
3. Se R aceita, M aceita w; portanto, *aceite*. Caso contrário, *rejeite*."

5.28 Suponha, para o propósito de obter uma contradição, que P é uma linguagem decidível satisfazendo as propriedades, e R_P uma MT que decide P. Mostramos como decidir A_{MT} usando R_P através da construção da MT S. Primeiro, seja $T_\emptyset$ uma MT que sempre rejeite; assim, $L(T_\emptyset) = \emptyset$. Você pode supor que $\langle T_\emptyset\rangle \notin P$ sem perda de generalidade, visto que pode prosseguir com $\overline{P}$ em vez de P se $\langle T_\emptyset\rangle \in P$. Como P não é trivial, existe uma MT T tal que $\langle T\rangle \in P$. Conceba S para decidir A_{MT} usando a capacidade de R_P de distinguir entre $T_\emptyset$ e T.

$S =$ "Sobre a entrada $\langle M, w \rangle$:

1. Use M e w para construir a seguinte MT M_w.
   $M_w =$ "Sobre a entrada x:
   1. Simule M sobre w. Se ela pára e rejeita, *rejeite*. Se ela aceita, prossiga no estágio 2.
   2. Simule T sobre x. Se ela aceita, *aceite*."
2. Use a MT R_P para determinar se $\langle M_w \rangle \in P$. Se SIM, *aceite*. Se NÃO, *rejeite*."

A MT M_w simula T se M aceita w. Logo, $L(M_w)$ é igual a $L(T)$ se M aceita w e é igual a $\emptyset$, em caso contrário. Portanto, $\langle M, w \rangle \in P$ sse M aceita w.

5.30 **(a)** *INFINITA*$_{\text{TM}}$ é uma linguagem de descrições de MTs. Ela satisfaz as duas condições do teorema de Rice. Primeiro, ela é não-trivial porque algumas MTs têm linguagens infinitas e outras não têm. Segundo, ela depende apenas da linguagem. Se duas MTs reconhecem a mesma linguagem, então ou ambas têm descrições em *INFINITA*$_{\text{TM}}$ ou nenhuma delas tem. Conseqüentemente, o teorema de Rice implica que *INFINITA*$_{\text{TM}}$ é indecidível.