ACH2053 – Introdução à Estatística

Conteúdo Teórico:
03 – Variáveis Aleatórias e Distribuições

Marcelo de Souza Lauretto
Sistemas de Informação – EACH
www.each.usp.br/lauretto

Referência:
Morris DeGroot, Mark Schervish.
Probability and Statistics. 4th Ed. – 3º capítulo

Abreviações e notações úteis

- Abreviações:
  - f.p.: função de probabilidade (variável discreta)
    - Inglês: p.f. (probability function)
  - f.d.p.: função de densidade de probabilidade (variável contínua)
    - Inglês: p.d.f. (probability density function)
  - f.d.a.: função de distribuição acumulada (variável discreta ou contínua)
    - Inglês: c.d.f. (cummulative distribution function)
- Notações:
  - $f(x)$: f.p. ou f.d.p. da variável aleatória *X*
  - $F(x)$: f.d.a. da variável aleatória *X*
  - $F^{-1}(p)$: função quantil de uma variável aleatória X; $p \in (0,1)$
  - $f(x, y)$: f.p. ou f.d.p. conjunta das variáveis aleatórias *X*,*Y*
  - $f_1(x)$: f.p. ou f.d.p. marginal de X; $f_2(y)$: f.p. ou f.d.p. marginal de *Y*;
  - $g_1(x|y)$: f.p. ou f.d.p. condicional de *X* dado $Y = y$; $g_2(y|x)$: f.p. ou f.d.p. condicional de *Y* dado $X = x$

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas

- Uma variável aleatória é uma função que associa a todo elemento do espaço amostral um número real.
- É uma ferramenta fundamental para modelar quantidades desconhecidas em análises estatísticas.
- Para cada variável aleatória X e cada conjunto C de números reais, podemos calcular a probabilidade de $X \in C$.
- A coleção de todas essas probabilidades é a distribuição de X.
- Classes de distribuições e variáveis aleatórias:
  – Discretas
  – Contínuas

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Definição

- Exemplo 3.1.1:

Tossing a Coin. Consider an experiment in which a fair coin is tossed 10 times. In this experiment, the sample space S can be regarded as the set of outcomes consisting of the 2^{10} different sequences of 10 heads and/or tails that are possible. We might be interested in the number of heads in the observed outcome. We can let X stand for the real-valued function defined on S that counts the number of heads in each outcome. For example, if s is the sequence HHTTTHTTTH, then $X(s) = 4$. For each possible sequence s consisting of 10 heads and/or tails, the value $X(s)$ equals the number of heads in the sequence. The possible values for the function X are $0, 1, \dots, 10$. ◄

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Definição

- **Definição 3.1.1: Variável aleatória.**
  Seja S o espaço amostral de um experimento. Uma função a valores reais que é definida sobre S é denominada uma *variável aleatória*.

- No exemplo 3.1.1, o número X de caras nos 10 lançamentos é uma variável aleatória. Outra variável aleatória é Y = 10 – X, o número de coroas.

- Exemplo 3.1.2: Medindo a altura de pessoas.
  Considere um experimento em que uma pessoa é selecionada ao acaso de uma população e sua altura em polegadas é medida. Essa altura é uma variável aleatória.

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Definição

- Exemplo 3.1.3:

Demands for Utilities. Consider the contractor in Example 1.5.4 on page 19 who is concerned about the demands for water and electricity in a new office complex. The sample space was pictured in Fig. 1.5 on page 12, and it consists of a collection of points of the form (x, y), where x is the demand for water and y is the demand for electricity. That is, each point $s \in S$ is a pair $s = (x, y)$. One random variable that is of interest in this problem is the demand for water. This can be expressed as $X(s) = x$ when $s = (x, y)$. The possible values of X are the numbers in the interval $[4, 200]$. Another interesting random variable is Y, equal to the electricity demand, which can be expressed as $Y(s) = y$ when $s = (x, y)$. The possible values of Y are the numbers in the interval $[1, 150]$. A third possible random variable Z is an indicator of whether or not at least one demand is high. Let A and B be the two events described in Example 1.5.4. That is, A is the event that water demand is at least 100, and B is the event that electric demand is at least 115. Define

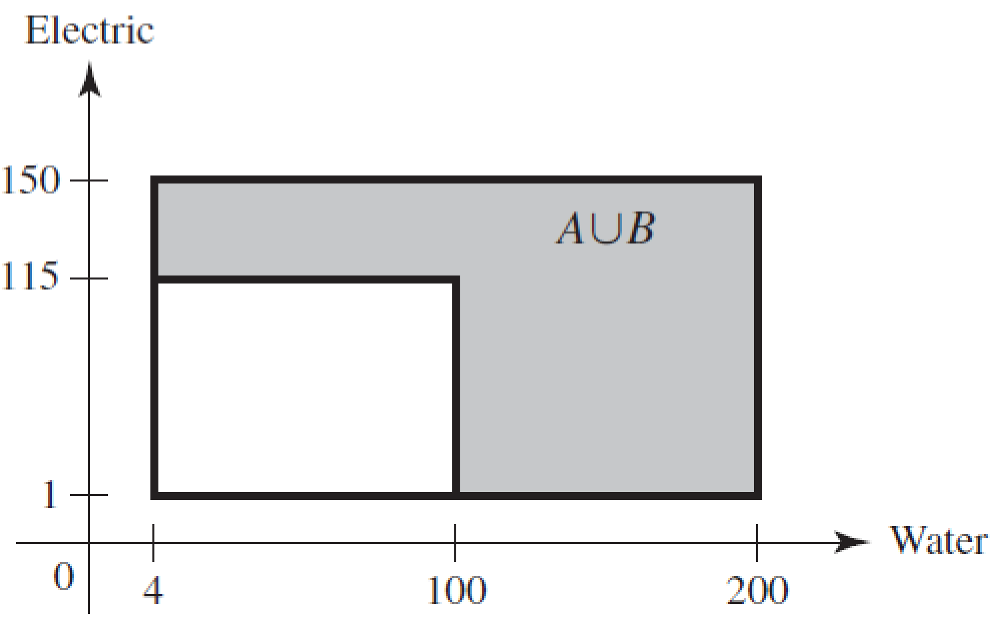
$$Z(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s \in A \cup B, \\ 0 & \text{if } s \notin A \cup B. \end{cases}$$

The possible values of Z are the numbers 0 and 1. The event $A \cup B$ is indicated in Fig. 3.1. ◄

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Definição

- Exemplo 3.1.3 (cont):

Figure 3.1 The event that at least one utility demand is high in Example 3.1.3.



3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Distribuição de uma variável aleatória

- Caso uma medida de probabilidade tenha sido especificada no espaço amostral de um experimento, podemos determinar probabilidades associadas com os possíveis valores de cada variável aleatória *X*.

- Seja *C* um subconjunto da reta real tal que $\{\mathrm{X} \in C\}$ é um evento, e denote por $\Pr(\mathrm{X} \in C)$ a probabilidade de que o valor de *X* pertencerá ao subconjunto *C*. Então $\Pr(\mathrm{X} \in C)$ é igual à probabilidade de que o resultado *s* do experimento será tal que $\mathrm{X}(\mathrm{s}) \in C$. Notação:
$$\Pr(\mathrm{X} \in C) = \Pr(\{s\colon X(s) \in C\}).$$

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Distribuição de uma variável aleatória

- **Definição 3.1.2. Distribuição**
  Seja X uma variável aleatória. A *distribuição* de X é a coleção de todas as probabilidades da forma $\Pr(\mathrm{X} \in C)$ para todos os conjuntos C de números reais tais que $\{\mathrm{X} \in C\}$ é um evento.

- Segue imediatamente da definição da distribuição de X que essa distribuição é, em si mesma, uma medida de probabilidade sobre o conjunto dos números reais.

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Distribuição de uma variável aleatória

- Exemplo 3.1.4:

Tossing a Coin. Consider again an experiment in which a fair coin is tossed 10 times, and let X be the number of heads that are obtained. In this experiment, the possible values of X are $0, 1, 2, \ldots, 10$. For each x, $\Pr(X = x)$ is the sum of the probabilities of all of the outcomes in the event $\{X = x\}$. Because the coin is fair, each outcome has the same probability $1/2^{10}$, and we need only count how many outcomes s have $X(s) = x$. We know that $X(s) = x$ if and only if exactly x of the 10 tosses are H. Hence, the number of outcomes s with $X(s) = x$ is the same as the number of subsets of size x (to be the heads) that can be chosen from the 10 tosses, namely, $\binom{10}{x}$, according to Definitions 1.8.1 and 1.8.2. Hence,

$$\Pr(X = x) = \binom{10}{x}\frac{1}{2^{10}} \quad \text{for } x = 0, 1, 2, \ldots, 10. \qquad \blacktriangleleft$$

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Distribuição de uma variável aleatória

- Exemplo 3.1.5:

Demands for Utilities. In Example 1.5.4, we actually calculated some features of the distributions of the three random variables X, Y, and Z defined in Example 3.1.3. For example, the event A, defined as the event that water demand is at least 100, can be expressed as $A = \{X \geq 100\}$, and $\Pr(A) = 0.5102$. This means that $\Pr(X \geq 100) = 0.5102$. The distribution of X consists of all probabilities of the form $\Pr(X \in C)$ for all sets C such that $\{X \in C\}$ is an event. These can all be calculated in a manner similar to the calculation of $\Pr(A)$ in Example 1.5.4. In particular, if C is a subinterval of the interval [4, 200], then

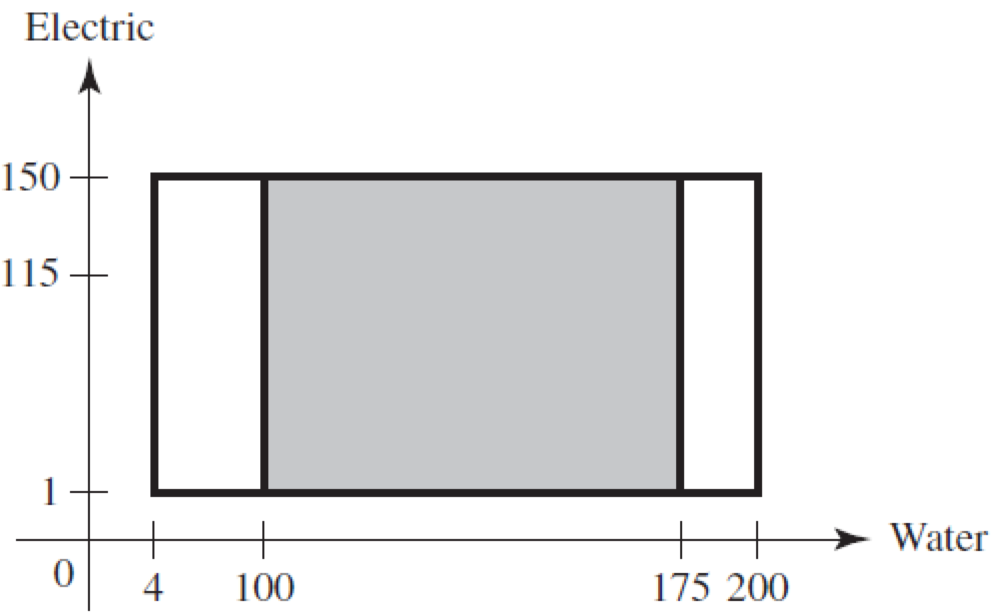
$$\Pr(X \in C) = \frac{(150 - 1) \times (\text{length of interval } C)}{29{,}204}. \tag{3.1.2}$$

For example, if C is the interval [50,175], then its length is 125, and $\Pr(X \in C) = 149 \times 125/29{,}204 = 0.6378$. The subset of the sample space whose probability was just calculated is drawn in Fig. 3.2. ◄

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Distribuição de uma variável aleatória

- Exemplo 3.1.5 (cont):

Figure 3.2 The event that water demand is between 50 and 175 in Example 3.1.5.



3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Definição de distribuições discretas

- **Definição 3.1.3: Distribuição discreta / variável aleatória discreta**
  Dizemos que uma variável aleatória *X* tem uma *distribuição discreta* ou que *X* é uma *variável aleatória discreta* se *X* pode assumir apenas um número finito *k* de diferentes valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$, ou no máximo uma sequência infinita de diferentes valores $x_1, x_2, \ldots$

- Variáveis aleatórias que podem assumir qualquer valor em um intervalo são ditas ter distribuições contínuas, e serão discutidos na Seção 3.2.

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Definição de distribuições discretas

- **Definição 3.1.4: Função de probabilidade / Suporte**
  Se uma variável aleatória *X* tem uma distribuição discreta, a *função de probabilidade* (abreviada por f.p. em português, p.f. em inglês) de *X* é definida como a função *f* tal que para cada número real *x*,

$$f(x) = \Pr(X = x).$$

  O fecho do conjunto $\{f(x) > 0\}$ é denominado *suporte de X* (ou *suporte da distribuição de X*).

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Definição de distribuições discretas

- Exemplo 3.1.6:

Demands for Utilities. The random variable Z in Example 3.1.3 equals 1 if at least one of the utility demands is high, and $Z = 0$ if neither demand is high. Since Z takes only two different values, it has a discrete distribution. Note that $\{s : Z(s) = 1\} = A \cup B$, where A and B are defined in Example 1.5.4. We calculated $\Pr(A \cup B) = 0.65253$ in Example 1.5.4. If Z has p.f. f, then

$$f(z) = \begin{cases} 0.65253 & \text{if } z = 1, \\ 0.34747 & \text{if } z = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The support of Z is the set $\{0, 1\}$, which has only two elements. ◀

- Exemplo 3.1.7:

Tossing a Coin. The random variable X in Example 3.1.4 has only 11 different possible values. Its p.f. f is given at the end of that example for the values $x = 0, \ldots, 10$ that constitute the support of X; $f(x) = 0$ for all other values of x. ◀

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Definição de distribuições discretas

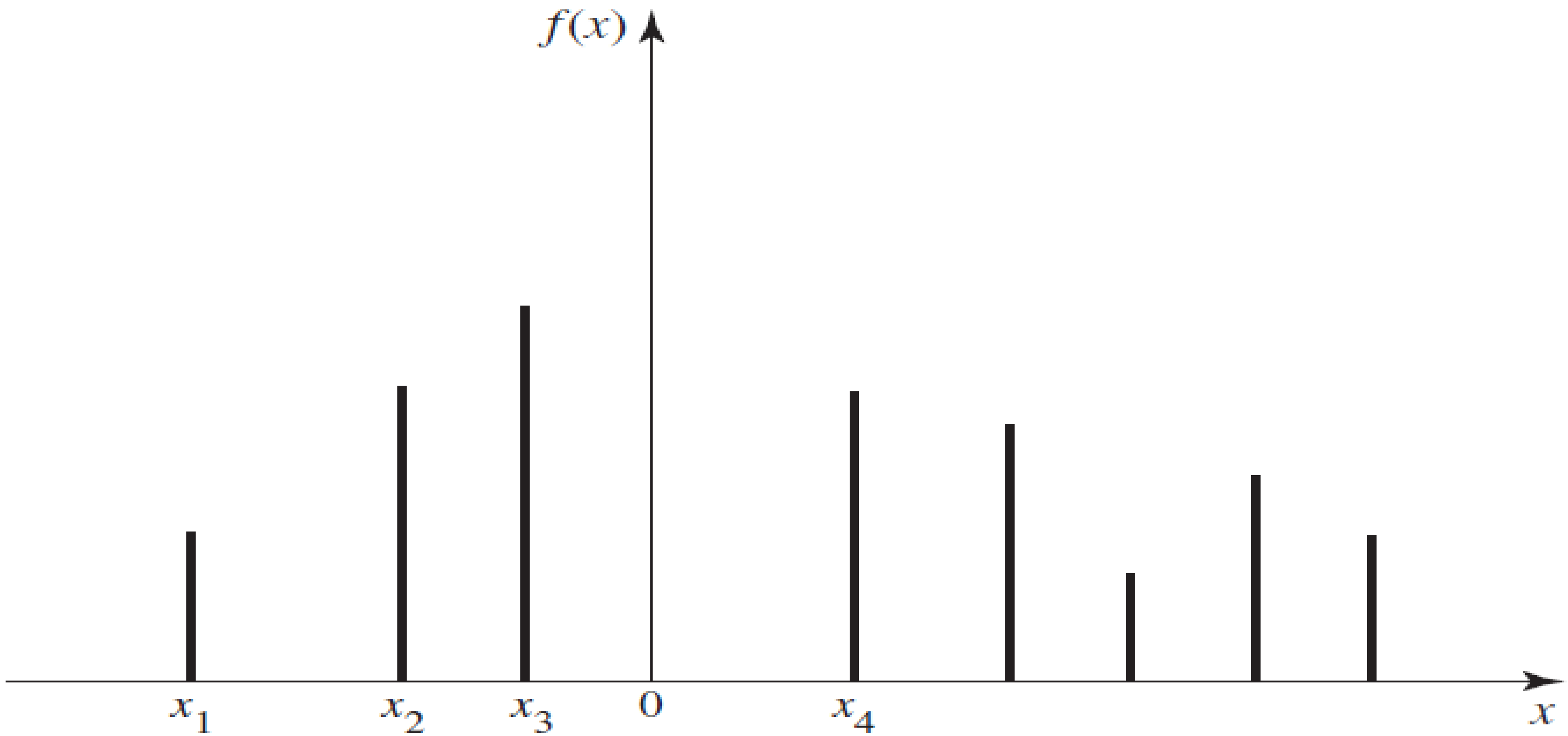
- **Teorema 3.1.1:**
  Seja X uma variável aleatória discreta com f.p. f. Se x não é um dos possíveis valores de X, então $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 0$. Adicionalmente, se a sequência $x_1, x_2, \ldots$ inclui todos os possíveis valores de X, então $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$.

- **Teorema 3.1.2:**
  Se X tem uma distribuição discreta, a probabilidade de cada subconjunto C da reta real pode ser determinada pela relação

$$\Pr(X \in C) = \sum_{x_i \in C} f(x_i)\,.$$

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Definição de distribuições discretas

- Exemplo de f.p. típica:



  - Soma das alturas de todos os segmentos verticais deve ser igual a 1
  - Probabilidade de X pertencer a um conjunto de valores é a soma das probabilidades individuais

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Definição de distribuições discretas

- **Definição 3.1.5: Distribuição / variável aleatória de Bernoulli**
  Uma variável aleatória Z que assume apenas dois valores 0 e 1 com $\Pr(Z = 1) = p$ tem a *distribuição de Bernoulli com parâmetro p*.
  Dizemos também que Z é uma *variável aleatória de Bernoulli com parâmetro p*.

- **Exemplo:**
  Variável Z no Exemplo 3.1.6 tem distribuição de Bernoulli com parâmetro 0.65252.

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Distribuições uniformes nos inteiros

- **Definição 3.1.6: Distribuição uniforme nos inteiros.** Sejam $a \leq b$ inteiros. Suponha que o valor de uma variável aleatória X seja igualmente provável para cada um dos inteiros $a, \ldots, b$. Então dizemos que x tem *distribuição uniforme nos inteiros* $a, \ldots, b$.

- Exemplo 3.1.8:

Daily Numbers. A popular state lottery game requires participants to select a three-digit number (leading 0s allowed). Then three balls, each with one digit, are chosen at random from well-mixed bowls. The sample space here consists of all triples (i_1, i_2, i_3) where $i_j \in \{0, \ldots, 9\}$ for $j = 1, 2, 3$. If $s = (i_1, i_2, i_3)$, define $X(s) = 100i_1 + 10i_2 + i_3$. For example, $X(0, 1, 5) = 15$. It is easy to check that $\Pr(X = x) = 0.001$ for each integer $x \in \{0, 1, \ldots, 999\}$. ◀

A variável X tem distribuição uniforme nos inteiros 0,1,...,999.

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Distribuições uniformes nos inteiros

- Uma distribuição uniforme em um conjunto de k inteiros tem probabilidade de $1/k$ em cada inteiro.
- Em uma sequência $a, a+1, \ldots, b$, com $b > a$, existem $b - a + 1$ inteiros (incluindo a e b).
  O teorema abaixo é decorrência direta desses resultados.

- Teorema 3.1.3: Se X tem distribuição uniforme nos inteiros $a, a+1, \ldots, b$, a f. p. de X é

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a+1} & \text{for } x = a, \ldots, b, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Distribuições uniformes nos inteiros

- A distribuição uniforme nos inteiros $a, \ldots, b$ representa o resultado de um experimento que é usualmente descrito dizendo-se que um dos inteiros $a, \ldots, b$ é *escolhido ao acaso*.
- Nesse contexto, a expressão "ao acaso" significa que cada um dos $b - a + 1$ inteiros é igualmente provável de ser escolhido.
- Logo, não é possível escolher um inteiro ao acaso do conjunto de *todos* os inteiros positivos, pois não é possível atribuir a mesma probabilidade a cada um dos inteiros positivos e ainda fazer com que a soma dessas probabilidades seja 1.
- Ou seja, uma distribuição uniforme não pode ser atribuída a uma sequência infinita de possíveis valores.

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Distribuições binomiais

- Exemplo 3.1.9:

Defective Parts. Consider again Example 2.2.5 from page 69. In that example, a machine produces a defective item with probability p $(0 < p < 1)$ and produces a nondefective item with probability $1 - p$. We assumed that the events that the different items were defective were mutually independent. Suppose that the experiment consists of examining n of these items. Each outcome of this experiment will consist of a list of which items are defective and which are not, in the order examined. For example, we can let 0 stand for a nondefective item and 1 stand for a defective item. Then each outcome is a string of n digits, each of which is 0 or 1. To be specific, if, say, $n = 6$, then some of the possible outcomes are

$$010010,\ 100100,\ 000011,\ 110000,\ 100001,\ 000000,\ \text{etc.} \tag{3.1.3}$$

We will let X denote the number of these items that are defective. Then the random variable X will have a discrete distribution, and the possible values of X will be $0, 1, 2, \ldots, n$. For example, the first four outcomes listed in Eq. (3.1.3) all have $X(s) = 2$. The last outcome listed has $X(s) = 0$. ◄

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Distribuições binomiais

- O Exemplo 3.1.9 é uma generalização do Exemplo 2.2.5 com *n* itens inspecionados ao invés de apenas 6, e também reescrito na notação de variáveis aleatórias.
- Para $x = 0,1,\ldots,n$, a probabilidade de obter cada sequência ordenada particular de n itens contendo exatamente x itens defeituosos e $n-x$ não defeituosos é $p^x(1-p)^{n-x}$, exatamente como no Exemplo 2.2.5. Como há $\binom{n}{x}$ diferentes sequências ordenadas desse tipo, segue que

$$\Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

- Portanto, a f.p. de *X* é como segue:

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{for } x = 0, 1, \ldots, n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.1.4}$$

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Distribuições binomiais

- **Definição 3.1.7: Distribuição / variável aleatória binomial**
  A distribuição discreta representada pela f.p. da equação 3.1.4 é denominada *distribuição binomial com parâmetros n e p*. Uma variável aleatória com essa distribuição é dita ser uma *variável aleatória binomial com parâmetros n e p*.

- O nome de cada distribuição binomial é suficiente para construir sua f.p.
  - Nome inclui os dois parâmetros

- A família de distribuições binomiais é uma das mais importantes em probabilidade e estatística.

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Distribuições binomiais

- Note que, para valores altos de n e x, a Equação 3.1.4 não pode ser aplicada diretamente, pois:
  - Os fatoriais envolvidos no coeficiente binomial $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\ (n-x)!}$ convergem rapidamente para infinito e, assim, "estourando" a capacidade de representação (ou precisão) das linguagens de programação
  - Analogamente, as potências p^x e $(1-p)^{n-x}$ convergem rapidamente para 0, também "estourando" a precisão das linguagens de programação
- Solução:
  - realizar os cálculos parciais em logaritmos
  - reconverter o resultados dos cálculos para exponencial

3.1 Variáveis aleatórias e distribuições discretas – Distribuições binomiais

- Método computacionalmente estável para computar $f(x)$ na Equação 3.1.4:

$$lf(x) = \log f(x) = \log\left(\frac{n!}{x!\ \ (n-x)!}\ \ p^x (1-p)^{n-x}\right)$$

$$= \log(n!) - \log(x!) - \log([n-x]!) + \log(p^x) + \log([1-p]^{n-x})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \log i - \sum_{i=1}^{x} \log i - \sum_{i=1}^{n-x} \log i + x \log p + (n-x)\log(1-p)$$

$$f(x) = \exp(lf(x))$$

3.2 Distribuições contínuas

- A seguir, consideramos variáveis aleatórias que podem assumir qualquer valor em um intervalo (limitado ou não).

- Se uma variável aleatória X está associada com uma função f tal que a integral de f sobre cada intervalo fornece a probabilidade de X estar no intervalo, então denominamos f a função de densidade de probabilidade (f.d.p) de X e dizemos que X tem uma distribuição contínua.

3.2 Distribuições contínuas
A função de densidade de probabilidade

- Exemplo 3.2.1

Demands for Utilities. In Example 3.1.5, we determined the distribution of the demand for water, X. From Fig. 3.2, we see that the smallest possible value of X is 4 and the largest is 200. For each interval $C = [c_0, c_1] \subset [4, 200]$, Eq. (3.1.2) says that

$$\Pr(c_0 \leq X \leq c_1) = \frac{149(c_1 - c_0)}{29204} = \frac{c_1 - c_0}{196} = \int_{c_0}^{c_1} \frac{1}{196} dx.$$

So, if we define

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{196} & \text{if } 4 \leq x \leq 200, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{3.2.1}$$

we have that

$$\Pr(c_0 \leq X \leq c_1) = \int_{c_0}^{c_1} f(x) dx. \tag{3.2.2}$$

Because we defined $f(x)$ to be 0 for x outside of the interval [4, 200], we see that Eq. (3.2.2) holds for all $c_0 \leq c_1$, even if $c_0 = -\infty$ and/or $c_1 = \infty$. ◀

3.2 Distribuições contínuas
A função de densidade de probabilidade

- **Definição 3.2.1: Distribuição / variável aleatória contínua:** Dizemos que uma variável aleatória *X* tem uma *distribuição contínua* ou que *X* é uma *variável aleatória contínua* se existe uma função não-negativa *f*, definida na reta real, tal que para todo intervalo de números reais (limitado ou não), a probabilidade de que *X* assume um valor no intervalo é a integral de *f* sobre aquele intervalo.

- Por exemplo, na situação descrita na Definição 3.2.1, para cada intervalo fechado [a,b],

$$\Pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (3.2.3)$$

Analogamente,

$\Pr(X \geq a) = \int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\Pr(X \leq b) = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx$.

3.2 Distribuições contínuas
A função de densidade de probabilidade

- **Definição 3.2.2: Função de densidade de probabilidade / Suporte**
  Se *X* tem uma distribuição contínua, a função *f* descrita na Definição 3.2.1 é denominada *função de densidade de probabilidade* (abreviada por f.d.p. em portugês, p.d.f. em inglês) de *X.*
  O fecho do conjunto $\{\mathrm{x}:\ \mathrm{f}(\mathrm{x}) > 0\}$ é denominado *suporte de X* (ou *suporte da distribuição de X*).

- Toda f.d.p. deve satisfazer os dois seguintes requisitos:

$$f(x) \geq 0, \quad \text{for all x}, \tag{3.2.4}$$

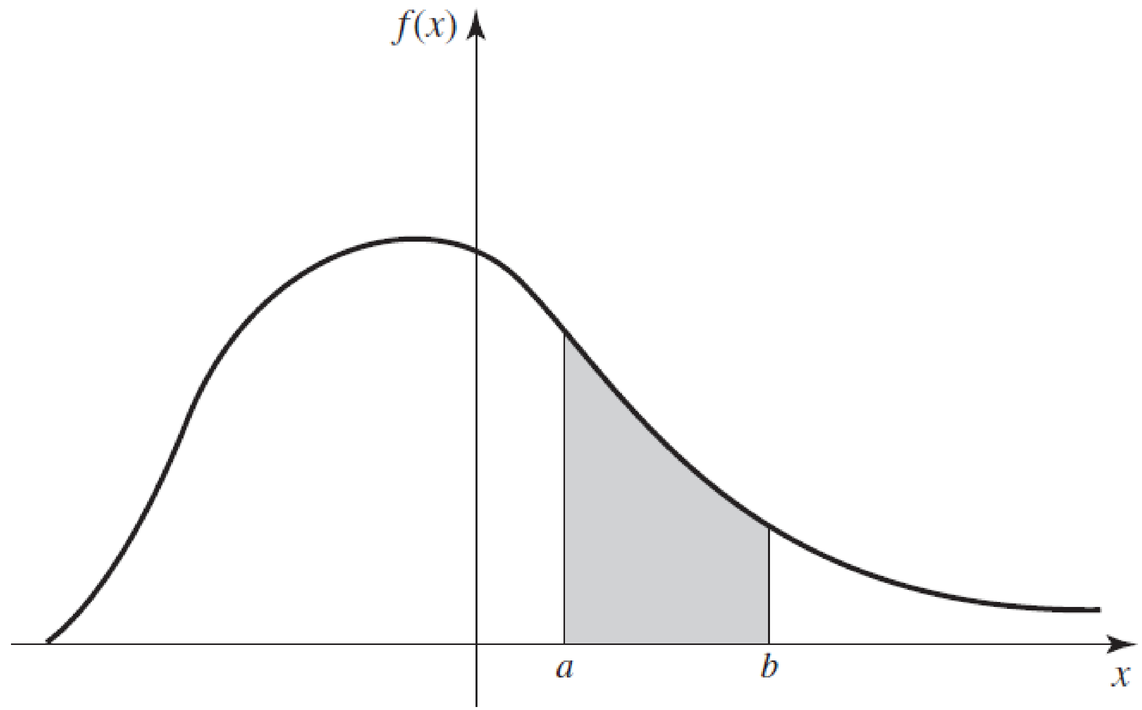
e

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1. \tag{3.2.5}$$

3.2 Distribuições contínuas
A função de densidade de probabilidade

- Exemplo de f.d.p. típica:
  - Área total sob a curva deve ser 1
  - O valor de $\Pr(a \leq X \leq b)$ é igual à área da região sombreada
  - Lembre-se de que $\Pr(X = a) = \Pr(a \leq X \leq a) = 0$.

Figure 3.4 An example of a p.d.f.



3.2 Distribuições contínuas
Distribuições uniformes em intervalos

- **Definição 3.2.3: Distribuição uniforme em um intervalo** Sejam *a* e *b* dois números reais dados tais que *a* < *b*. Seja X uma variável aleatória tal que é conhecido que $a \leq X \leq b$ e, para cada subintervalo de [*a*, *b*], a probabilidade de que X pertence àquele subintervalo é proporcional ao comprimento do mesmo. Então dizemos que a variável aleatória X tem a *distribuição uniforme no intervalo* [*a*, *b*].

- Uma variável aleatória *X* com a distribuição uniforme no intervalo [*a*, *b*] representa o resultado de um experimento que é comumente descrito dizendo que um ponto é escolhido *ao acaso* do intervalo [*a*, *b*], ou seja, O ponto é tão provável de ser escolhido de uma parte qualquer do intervalo como de qualquer outra parte de mesmo comprimento.

3.2 Distribuições contínuas
Distribuições uniformes em intervalos

- **Teorema 3.2.1: F.d.p de uma distribuição uniforme**
  Se *X* tem a distribuição uniforme em um intervalo [*a*, *b*], então a f.d.p. de X é

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{for } a \le x \le b, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad (3.2.6)$$

Proof X must take a value in the interval $[a, b]$. Hence, the p.d.f. $f(x)$ of X must be 0 outside of $[a, b]$. Furthermore, since any particular subinterval of $[a, b]$ having a given length is as likely to contain X as is any other subinterval having the same length, regardless of the location of the particular subinterval in $[a, b]$, it follows that $f(x)$ must be constant throughout $[a, b]$, and that interval is then the support of the distribution. Also,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = 1. \qquad (3.2.7)$$

Therefore, the constant value of $f(x)$ throughout $[a, b]$ must be $1/(b-a)$, and the p.d.f. of X must be (3.2.6). ∎

3.2 Distribuições contínuas
Distribuições uniformes em intervalos

- Observações:
  - Densidade não é probabilidade!
    A f.d.p. de X, $f(x)$, por si só não é igual à probabilidade de X estar perto de x; essa probabilidade pode ser fornecida pela integral de f sobre regiões próximas de x.
  - Assim como ocorre com variáveis discretas com distribuição uniforme nos inteiros *a*,...,*b*, com variáveis contínuas não é possível definir uma distribuição uniforme sobre um intervalo não limitado, pois o comprimento de tal intervalo é infinito.
  - Considere novamente a distribuição no intervalo [*a*, *b*]. Uma vez que a probabilidade é 0 que um dos limites a ou b sejam escolhidos, é irrelevante se a distribuição é considerada como uma distribuição uniforme no intervalo *fechado* $a \leq X \leq b$, ou como uma distribuição uniforme no intervalo *aberto* $a < X < b$, ou quaisquer outras versões (*a*, *b*], [*a*, *b*) (as integrais permanecem as mesmas).

3.2 Distribuições contínuas
Outras distribuições contínuas

- Exemplo 3.2.3:

Incompletely Specified p.d.f. Suppose that the p.d.f. of a certain random variable X has the following form:

$$f(x) = \begin{cases} cx & \text{for } 0 < x < 4, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where c is a given constant. We shall determine the value of c.

For every p.d.f., it must be true that $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$. Therefore, in this example,

$$\int_0^4 cx\, dx = 8c = 1.$$

Hence, $c = 1/8$. ◀

- Esse exemplo ilustra um ponto importante que simplifica muitos resultados estatísticos. A f.d.p. de X foi especificada sem fornecer explicitamente o valor da constante c. Contudo, fomos capazes de calcular o valor de c usando o fato de que a integral de uma f.d.p. deve ser 1.

3.2 Distribuições contínuas
Outras distribuições contínuas

- Exemplo 3.2.4:

Calculating Probabilities from a p.d.f. Suppose that the p.d.f. of X is as in Example 3.2.3, namely,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} & \text{for } 0 < x < 4, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We shall now determine the values of $\Pr(1 \le X \le 2)$ and $\Pr(X > 2)$. Apply Eq. (3.2.3) to get

$$\Pr(1 \le X \le 2) = \int_1^2 \frac{1}{8} x \, dx = \frac{3}{16}$$

and

$$\Pr(X > 2) = \int_2^4 \frac{1}{8} x \, dx = \frac{3}{4}. \quad \blacktriangleleft$$

3.2 Distribuições contínuas
Outras distribuições contínuas

- Exemplo 3.2.5:

Unbounded Random Variables. It is often convenient and useful to represent a continuous distribution by a p.d.f. that is positive over an unbounded interval of the real line. For example, in a practical problem, the voltage X in a certain electrical system might be a random variable with a continuous distribution that can be approximately represented by the p.d.f.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \le 0, \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{for } x > 0. \end{cases} \tag{3.2.8}$$

It can be verified that the properties (3.2.4) and (3.2.5) required of all p.d.f.'s are satisfied by $f(x)$.

  – Mesmo que a voltagem seja limitada em situações reais, a f.d.p acima pode fornecer uma boa aproximação para a distribuição de *X* sobre sua faixa completa de valores.
  – Para checar a condição 3.2.5, usar a solução em: http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcII/ImproperIntegrals.aspx

3.2 Distribuições contínuas
Distribuições mistas

- Frequentemente, as distribuições padrão encontradas em problemas práticos são discretas ou contínuas. Porém, são comuns situações em que devemos considerar uma distribuição que é uma mistura de uma distribuição discreta com uma distribuição contínua.
- Um caso típico ocorre com dados censurados, como o exemplo abaixo.

3.2 Distribuições contínuas
Distribuições mistas

- Exemplo 3.2.7:

Truncated Voltage. Suppose that in the electrical system considered in Example 3.2.5, the voltage X is to be measured by a voltmeter that will record the actual value of X if $X \leq 3$ but will simply record the value 3 if $X > 3$. If we let Y denote the value recorded by the voltmeter, then the distribution of Y can be derived as follows.

First, $\Pr(Y = 3) = \Pr(X \geq 3) = 1/4$. Since the single value $Y = 3$ has probability 1/4, it follows that $\Pr(0 < Y < 3) = 3/4$. Furthermore, since $Y = X$ for $0 < X < 3$, this probability 3/4 for Y is distributed over the interval (0, 3) according to the same p.d.f. (3.2.8) as that of X over the same interval. Thus, the distribution of Y is specified by the combination of a p.d.f. over the interval (0, 3) and a positive probability at the point $Y = 3$. ◀

- É fácil verificar que $\Pr(0 < Y < 3) = \Pr(0 < X < 3) = \int_0^3 \frac{1}{(1+x)^2}\, dx = \frac{3}{4}$, o que implica que $\Pr(X \geq 3) = 1/4$. Assim:

$$f(y) = \begin{cases} 0 \text{ para } y \leq 0 \text{ ou } y > 3 \\ \dfrac{1}{(1+y)^2} \text{ para } 0 < y < 3 \\ \dfrac{1}{4} \text{ para } y = 3 \end{cases}$$

3.3 Função de distribuição acumulada

- Toda distribuição (discreta ou contínua) pode ser caracterizada pela sua função de distribuição acumulada, abreviada por f.d.a. em português e c.d.f. em inglês.
- A inversa da f.d.a é chamada função quantil, e é útil para indicar valores de interesse da variável aleatória de acordo com a distribuição acumulada.
  – P.ex mediana, quartis, decis, percentis, etc são todos aplicações da função quantil.

3.3 Função de distribuição acumulada

- Exemplo 3.3.1:

Voltage. Consider again the voltage X from Example 3.2.5. The distribution of X is characterized by the p.d.f. in Eq. (3.2.8). An alternative characterization that is more directly related to probabilities associated with X is obtained from the following function:

$$
\begin{aligned}
F(x) = \Pr(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy &= \begin{cases} 0 & \text{for } x \le 0, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{dy}{(1+y)^2} & \text{for } x > 0, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{for } x \le 0, \\ 1 - \dfrac{1}{1+x} & \text{for } x > 0. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.3.1}
$$

So, for example, $\Pr(X \le 3) = F(3) = 3/4$. ◄

3.3 Função de distribuição acumulada
Definição e propriedades básicas

- **Definição 3.3.1: Função de distribuição acumulada**
  A *função de distribuição* ou *função de distribuição acumulada* (abreviada por f.d.a. em português, c.d.f. em inglês) *F* para uma variável aleatória *X* é a função

$$F(x) = \Pr(X \leq x) \quad \text{for } -\infty < x < \infty. \tag{3.3.2}$$

- A definição acima vale para qualquer variável aleatória *X*, seja ela discreta, contínua ou mista.

- No exemplo 3.3.1, foi apresentada a f.d.a. para uma variável aleatória contínua. O exemplo a seguir apresenta a f.d.a. de uma variável aleatória discreta.

3.3 Função de distribuição acumulada
Definição e propriedades básicas

- Exemplo 3.3.2:

Bernoulli c.d.f. Let X have the Bernoulli distribution with parameter p defined in Definition 3.1.5. Then $\Pr(X=0)=1-p$ and $\Pr(X=1)=p$. Let F be the c.d.f. of X. It is easy to see that $F(x)=0$ for $x<0$ because $X\geq 0$ for sure. Similarly, $F(x)=1$ for $x\geq 1$ because $X\leq 1$ for sure. For $0\leq x<1$, $\Pr(X\leq x)=\Pr(X=0)=1-p$ because 0 is the only possible value of X that is in the interval $(-\infty, x]$. In summary,

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{for } x<0, \\ 1-p & \text{for } 0\leq x<1, \\ 1 & \text{for } x\geq 1. \end{cases}$$ ◄

- Propriedades principais de uma f.d.a:
  - Permite cálculos de probabilidade de quaisquer intervalos (Teorema 3.3.2)
  - É uma função definida na reta real (Equação 3.3.2, slide anterior)
  - O valor de *F* para qualquer *x* é um número no intervalo [0,1]
  - Satisfaz às três propriedades a seguir.

3.3 Função de distribuição acumulada
Definição e propriedades básicas

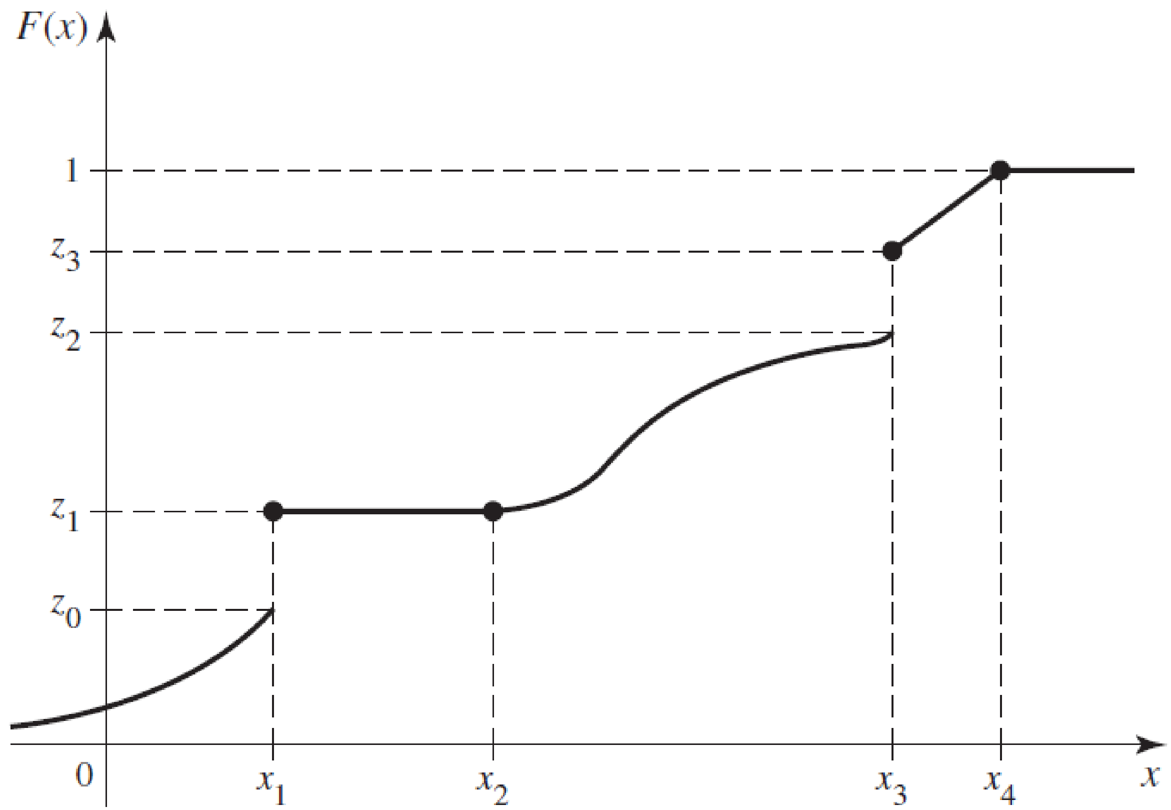
- **Propriedade 3.3.1: Não decrescente**
  A função $F(x)$ é não decrescente em x; ou seja, se $x_1 < x_2$, $F(x_1) < F(x_2)$.
  - **Dem:** se $x_1 < x_2$, então o evento $\{X \leq x_1\}$ é um subconjunto do evento $\{X \leq x_2\}$. Logo, pelo Teorema 1.5.4, $\Pr\{X \leq x_1\} \leq \Pr\{X \leq x_2\}$.

- **Propriedade 3.3.2: Limites em $\pm\infty$**
  $$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$
  - **Dem:** Exercício 13 na Seção 1.10.

- Valores limites especificados na Propriedade 3.3.2 são exemplificados na Figura 3.6.

3.3 Função de distribuição acumulada
Definição e propriedades básicas

Figure 3.6 An example of a c.d.f.



No exemplo acima:

- $F(x)$ é descontínua
- $F(x) = 1$ em $x = x_4$ → $\Pr(X \leq x_4) = 1$ e $\Pr(X > x_4) = 0$
- $F(x)$ tende a 0 com $x \to -\infty$ mas $\Pr(X \leq x) > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$

3.3 Função de distribuição acumulada
Definição e propriedades básicas

- Para fda's descontínuas, para cada valor fixo x, denotamos $F(x^{-})$ o limite dos valores de $F(y)$ à medida em que y se aproxima de x à esquerda:
$$F(x^{-}) = \lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} F(y) \, .$$

- Analogamente, denotamos por $F(x^{+})$ o limite dos valores de $F(y)$ à medida em que y se aproxima de x à direita:
$$F(x^{+}) = \lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} F(y) \, .$$

3.3 Função de distribuição acumulada
Definição e propriedades básicas

- **Propriedade 3.3.3: Continuidade à direita.**
  Uma f.d.a. é sempre contínua à direita, ou seja, $F(x) = F(x^+)$ para todo ponto *x*.
  - **Dem:** Seja $y_1 > y_2 > \cdots$ uma sequência decrescente de números tais que $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Então o evento $\{X \leq x\}$ é a intersecção de todos os eventos $\{X \leq x_n\}$ para $n = 1,2,\ldots$. Logo, pelo Exercício 13 da Seção 1.10,
  $$F(x) = \Pr(X \leq x) = \lim_{n\to\infty} \Pr(X \leq y_n) = F(x^+).$$

- Segue da Propriedade 3.3.3 que todo ponto de descontinuidade x, $F(x^+) = F(x)$ e $F(x^-) < F(x)$.
  - Exemplo: Figura 3.6

3.3 Função de distribuição acumulada
Determinação de probabilidades a partir da f.d.a

- Exemplo 3.3.3:

Voltage. In Example 3.3.1, suppose that we want to know the probability that X lies in the interval [2, 4]. That is, we want $\Pr(2 \le X \le 4)$. The c.d.f. allows us to compute $\Pr(X \le 4)$ and $\Pr(X \le 2)$. These are related to the probability that we want as follows: Let $A = \{2 < X \le 4\}$, $B = \{X \le 2\}$, and $C = \{X \le 4\}$. Because X has a continuous distribution, $\Pr(A)$ is the same as the probability that we desire. We see that $A \cup B = C$, and it is clear that A and B are disjoint. Hence, $\Pr(A) + \Pr(B) = \Pr(C)$. It follows that

$$\Pr(A) = \Pr(C) - \Pr(B) = F(4) - F(2) = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{20}. \quad ◀$$

- O raciocínio do exemplo acima pode ser estendido para uma variável aleatória arbitrária, para quaisquer intervalos.
- Teoremas a seguir derivam essa probabilidades para quatro tipos de intervalos.

3.3 Função de distribuição acumulada
Determinação de probabilidades a partir da f.d.a

- **Teorema 3.3.1:**
  Para cada valor *x*,
  $$\Pr(X > x) = 1 - F(x). \tag{3.3.3}$$
  - **Dem:** Os eventos $\{X > x\}$ e $\{X \leq x\}$ são disjuntos, e sua união é o espaço amostral completo *S* cuja probabilidade é 1. Logo, $\Pr(X > x) + \Pr(X \leq x) = 1$ e o resultado segue diretamente da Equação 3.3.2.
- **Teorema 3.3.2:**
  Para todos os valores x_1 e x_2 tais que $x_1 < x_2$,
  $$\Pr(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1). \tag{3.3.4}$$
  - **Dem:** Seja $A = \{x_1 < X \leq x_2\}$, $\mathrm{B} = \{X \leq x_1\}$ e $\mathrm{C} = \{X \leq x_2\}$. Como no exemplo 3.3.3, A e B são disjuntos, e sua união é C; então, $\Pr(x_1 < X \leq x_2) + \Pr(X \leq x_1) = \Pr(X \leq x_2)$.
    Subtraindo $\Pr(X \leq x_1)$ nos dois lados e aplicando a Equação 3.3.2, segue o resultado.

3.3 Função de distribuição acumulada
Determinação de probabilidades a partir da f.d.a

- **Teorema 3.3.3:**
  Para cada valor *x*,

$$\Pr(X < x) = F(x^{-}). \tag{3.3.5}$$

  - **Dem:** Seja $y_1 < y_2 < \cdots$ uma sequência crescente de números tais que $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Então pode-se mostrar que

$$\{X < x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \le y_n\}.$$

    Logo, pelo exercício 12 da Seção 1.10 segue que

$$\begin{aligned}\Pr(X < x) &= \lim_{n\to\infty} \Pr(X \le y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} F(y_n) = F(x^{-}).\end{aligned}$$

  - Exemplos Fig. 3.6: $\Pr(X < x_3) = z_2$ e $\Pr(X < x_4) = 1$.

3.3 Função de distribuição acumulada
Determinação de probabilidades a partir da f.d.a

- **Teorema 3.3.4:**
  Para cada valor *x*,
  $$\Pr(X = x) = F(x) - F(x^-). \tag{3.3.6}$$
  - **Dem:** Note-se que $\Pr(\mathrm{X} = \mathrm{x}) = \Pr(\mathrm{X} \leq \mathrm{x}) - \Pr(\mathrm{X} < \mathrm{x})$. Aplicando as Equações 3.3.2 e 3.3.5, segue o resultado.
  - Exemplo: Na Fig. 3.6: $\Pr(X = x_1) = z_1 - z_0$, $\Pr(X = x_3) = z_3 - z_2$ e a probabilidade de qualquer outro valor individual de *X* é 0.

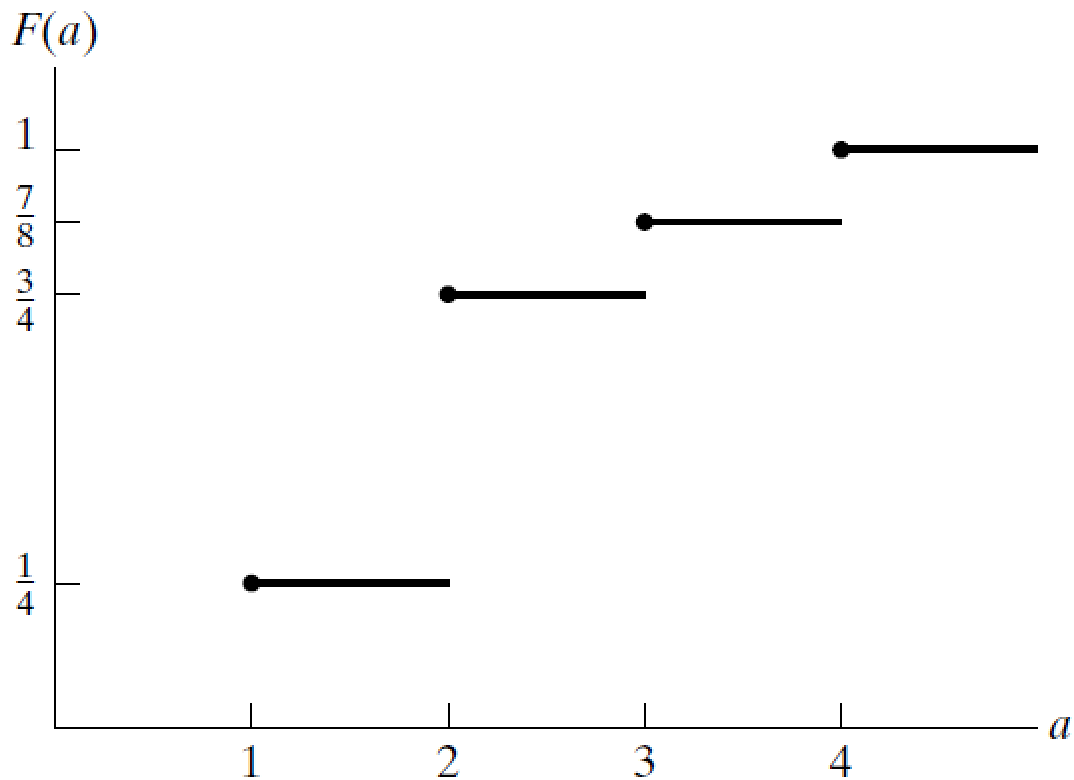
3.3 Função de distribuição acumulada
A f.d.a. de uma distribuição discreta

- Função de distribuição acumulada para variáveis discretas:
  - Pela definição e propriedades de uma f.d.a $F(x)$, segue que se $a < b$ e $\Pr(a < X < b) = 0$, então:
    - $F(x)$ será constante e horizontal no intervalo $a < X < b$.
    - A cada ponto x tal que $\Pr(X = x) > 0$, a f.d.a. aumentará pelo montante $\Pr(X = x)$.
  - Suponha que X tem uma distribuição discreta com a f.p. $f(x)$. As propriedades de uma f.d.a. implicam que $F(x)$ deve ter a seguinte forma:
    - $F(x)$ terá um aumento de magnitude $f(x_i)$ a cada possível valor de X;
    - $F(x)$ será constante entre cada par de saltos sucessivos.

3.3 Função de distribuição acumulada
A f.d.a. de uma distribuição discreta

- Ex: se uma variável aleatória *X* tem uma função de probabilidade dada por $p(1) = \frac{1}{4},\ p(2) = \frac{1}{2},\ p(3) = \frac{1}{8},$ $p(4) = \frac{1}{8}.$ Então a f.d.a será:

$$F(a) = \begin{cases} 0 & a < 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \leq a < 2 \\ \frac{3}{4} & 2 \leq a < 3 \\ \frac{7}{8} & 3 \leq a < 4 \\ 1 & 4 \leq a \end{cases}$$



3.3 Função de distribuição acumulada
A f.d.a. de uma distribuição contínua

- **Teorema 3.3.5:**
  Seja X uma variável aleatória com distribuição contínua, e denotemos por $f(x)$ e $F(x)$ sua f.d.p. e f.d.a, respectivamente. Então:
  - *F* é contínua em todo *x*,
  - $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \qquad (3.3.7)$$
  - $$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), \qquad (3.3.8)$$

  para todo x em que *f* é contínua.

3.3 Função de distribuição acumulada
A f.d.a. de uma distribuição contínua

- **Teorema 3.3.5:**
  - **Dem:**
    - Como a probabilidade de cada ponto individual é 0, *F* não possui saltos, e portanto é uma função contínua em toda a reta real.
    - Por definição, $F(x) = \Pr(X \leq x)$. Como *f* é a f.d.p. de *X*, temos da definição de f.d.p. que $\Pr(X \leq x)$ corresponde ao lado direito da Equação 3.3.7.
    - Segue da Equação 3.3.7 e da relação entre integrais e derivadas (o teorema fundamental do cálculo) que, para todo *x* em que *f* é contínua, vale a Equação 3.3.8.

- Assim, a f.d.a. de uma variável aleatória contínua *X* pode ser obtida da f.d.p e vice-versa.
  - Exemplos 3.2.5 e 3.3.1 apresentam, respectivamente, a f.d.p. e a f.d.a. da variável X representando a voltagem em um sistema elétrico.

3.3 Função de distribuição acumulada
A f.d.a. de uma distribuição contínua

- Exemplo 3.3.4:

Calculating a p.d.f. from a c.d.f. Let the c.d.f. of a random variable be

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0, \\ x^{2/3} & \text{for } 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{for } x > 1. \end{cases}$$

This function clearly satisfies the three properties required of every c.d.f., as given earlier in this section. Furthermore, since this c.d.f. is continuous over the entire real line and is differentiable at every point except $x = 0$ and $x = 1$, the distribution of X is continuous. Therefore, the p.d.f. of X can be found at every point other than $x = 0$ and $x = 1$ by the relation (3.3.8). The value of $f(x)$ at the points $x = 0$ and $x = 1$ can be assigned arbitrarily. When the derivative $F'(x)$ is calculated, it is found that $f(x)$ is as given by Eq. (3.2.9) in Example 3.2.6. Conversely, if the p.d.f. of X is given by Eq. (3.2.9), then by using Eq. (3.3.7) it is found that $F(x)$ is as given in this example. ◀

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^{-1/3} & \text{for } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad (3.2.9)$$

3.3 Função de distribuição acumulada
A função quantil

- Exemplo 3.3.5:

Fair Bets. Suppose that X is the amount of rain that will fall tomorrow, and X has c.d.f. F. Suppose that we want to place an even-money bet on X as follows: If $X \le x_0$, we win one dollar and if $X > x_0$ we lose one dollar. In order to make this bet fair, we need $\Pr(X \le x_0) = \Pr(X > x_0) = 1/2$. We could search through all of the real numbers x trying to find one such that $F(x) = 1/2$, and then we would let x_0 equal the value we found. If F is a one-to-one function, then F has an inverse F^{-1} and $x_0 = F^{-1}(1/2)$. ◄

- O valor x_0 procurado no exemplo 3.3.5 é denominado o *quantil 0.5 de X* ou o *50º percentil de X* pelo fato de 50% da distribuição de *X* ser igual ou menor que x_0.

3.3 Função de distribuição acumulada
A função quantil

- **Definição 3.3.2: Quantis / percentis**
  Seja X uma variável aleatória com f.d.a. F. Para cada p estritamente entre 0 e 1, defina $F^{-1}(p)$ como o menor valor de x tal que $F(x) \geq p$. Então $F^{-1}(p)$ é denominado o *quantil p* de X ou o *(100p)º percentil* de X.
  A função F^{-1} aqui definida no intervalo aberto $(0,1)$ é denominada a *função quantil* de X.

- Exemplo 3.3.6:

Standardized Test Scores. Many universities in the United States rely on standardized test scores as part of their admissions process. Thousands of people take these tests each time that they are offered. Each examinee's score is compared to the collection of scores of all examinees to see where it fits in the overall ranking. For example, if 83% of all test scores are at or below your score, your test report will say that you scored at the 83rd percentile. ◄

3.3 Função de distribuição acumulada
A função quantil

- A notação F^{-1} necessita de uma breve justificativa:
  - Suponha inicialmente que a f.d.a. F de X seja contínua e bijetora sobre todo o conjunto dos possíveis valores de X. Então a inversa F^{-1} existe, e para cada $0 < \mathrm{p} < 1$, existe um e somente um x tal que $F(x) = p$: Este x é $F^{-1}(p)$.
  - A Definição 3.3.2 estende o conceito de função inversa para funções não decrescentes (como as f.d.a's) que podem não ser nem bijetoras nem contínuas.
  - Por essa razão, a função quantil é também denominada *Inversa Generalizada de F*.

- *Quantis de distribuições contínuas:*
  Como mencionamos acima, quando a f.d.a. de uma variável aleatória *X* é contínua e bijetora no conjunto completo de possíveis valores de *X*, a inversa F^{-1} existe e é igual à função quantil de *X*.

3.3 Função de distribuição acumulada
A função quantil

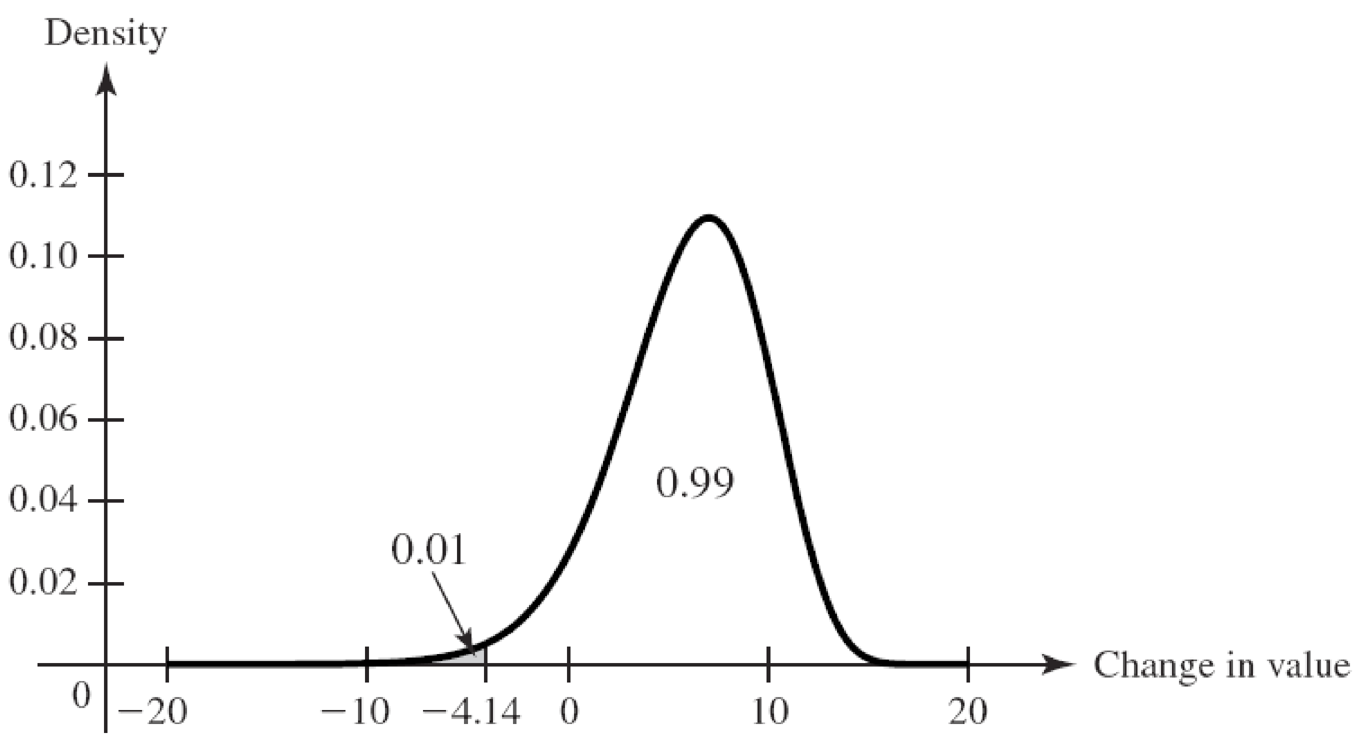
- Exemplo 3.3.7:

Value at Risk. The manager of an investment portfolio is interested in how much money the portfolio might lose over a fixed time horizon. Let X be the change in value of the given portfolio over a period of one month. Suppose that X has the p.d.f. in Fig. 3.7. The manager computes a quantity known in the world of risk management as *Value at Risk* (denoted by VaR). To be specific, let $Y = -X$ stand for the loss incurred by the portfolio over the one month. The manager wants to have a level of confidence about how large Y might be. In this example, the manager specifies a probability level, such as 0.99 and then finds y_0, the 0.99 quantile of Y. The manager is now 99% sure that $Y \leq y_0$, and y_0 is called the VaR. If X has a continuous distribution, then it is easy to see that y_0 is closely related to the 0.01 quantile of the distribution of X. The 0.01 quantile x_0 has the property that $\Pr(X < x_0) = 0.01$. But $\Pr(X < x_0) = \Pr(Y > -x_0) = 1 - \Pr(Y \leq -x_0)$. Hence, $-x_0$ is a 0.99 quantile of Y. For the p.d.f. in Fig. 3.7, we see that $x_0 = -4.14$, as the shaded region indicates. Then $y_0 = 4.14$ is VaR for one month at probability level 0.99. ◄

3.3 Função de distribuição acumulada
A função quantil

- Exemplo 3.3.7 (continuação)

Figure 3.7 The p.d.f. of the change in value of a portfolio with lower 1% indicated.



3.3 Função de distribuição acumulada
A função quantil

- Exemplo 3.3.8:

Uniform Distribution on an Interval. Let X have the uniform distribution on the interval $[a, b]$. The c.d.f. of X is

$$F(x) = \Pr(X \le x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \le a, \\ \displaystyle\int_a^x \frac{1}{b-a} du & \text{if } a < x \le b, \\ 1 & \text{if } x > b. \end{cases}$$

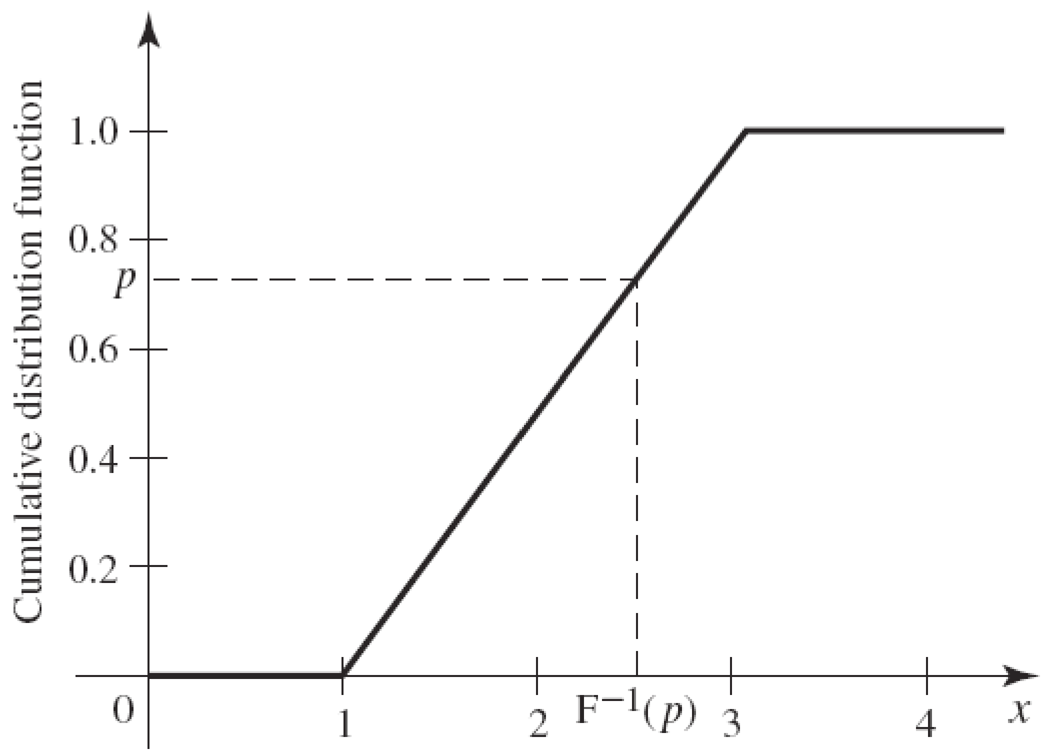
The integral above equals $(x-a)/(b-a)$. So, $F(x) = (x-a)/(b-a)$ for all $a < x < b$, which is a strictly increasing function over the entire interval of possible values of X. The inverse of this function is the quantile function of X, which we obtain by setting $F(x)$ equal to p and solving for x:

$$\begin{aligned} \frac{x-a}{b-a} &= p, \\ x - a &= p(b-a), \\ x &= a + p(b-a) = pb + (1-p)a. \end{aligned}$$

3.3 Função de distribuição acumulada
A função quantil

- Exemplo 3.3.8 (continuação):

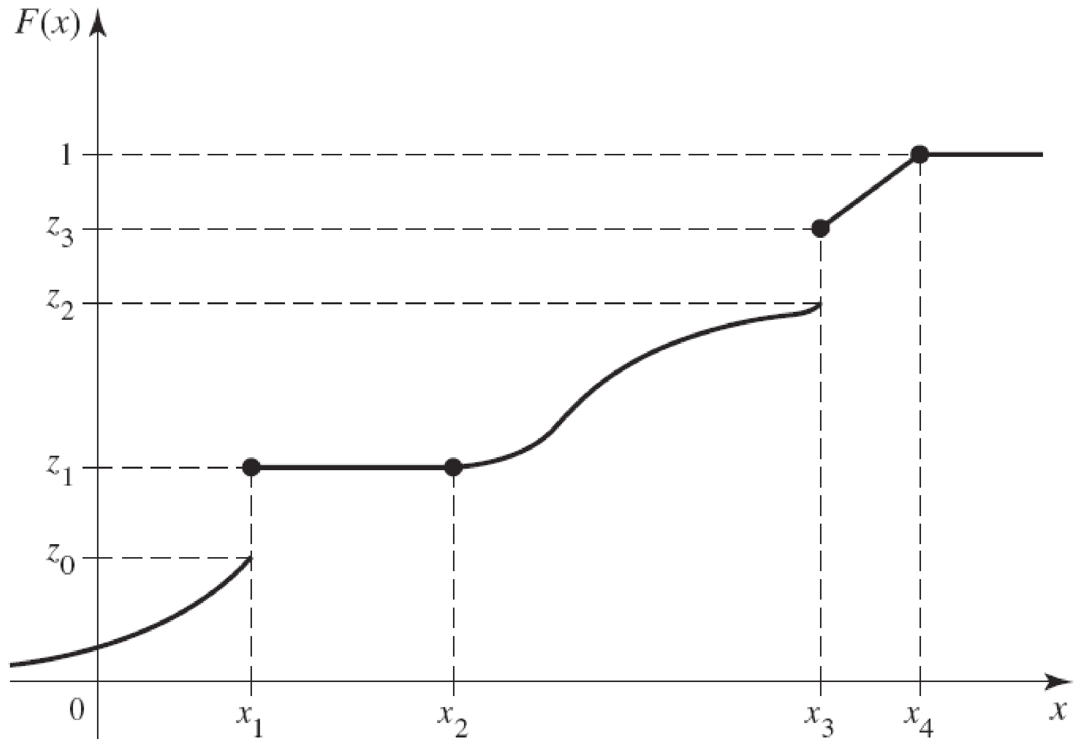
Figure 3.8 The c.d.f. of a uniform distribution indicating how to solve for a quantile.



3.3 Função de distribuição acumulada
A função quantil

- *Quantis de distribuições discretas:*
  A definição 3.3.2 garante a existência da função quantil para quaisquer distribuições discretas, contínuas ou mistas:
  – $F^{-1}(p) = \min\{x|F(x) \geq p\}, 0 < p < 1.$

- Ex: Figura 3.6:
  $F^{-1}(p) = x_1, z_0 \leq p \leq z_1$
  $F^{-1}(p) = x_3, z_2 \leq p \leq z_3$



- Obs:
  – F^{-1} não está definida para $p = 0$
  – Nem sempre há garantia da existência de $F^{-1}(1)$

3.3 Função de distribuição acumulada
A função quantil

- Exemplo 3.3.9:

Quantiles of a Binomial Distribution. Let X have the binomial distribution with parameters 5 and 0.3. The binomial table in the back of the book has the p.f. f of X, which we reproduce here together with the c.d.f. F:

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.1681	0.3602	0.3087	0.1323	0.0284	0.0024
$F(x)$	0.1681	0.5283	0.8370	0.9693	0.9977	1

(A little rounding error occurred in the p.f.) So, for example, the 0.5 quantile of this distribution is 1, which is also the 0.25 quantile and the 0.20 quantile. The entire quantile function is in Table 3.1. So, the 90th percentile is 3, which is also the 95th percentile, etc. ◀

3.3 Função de distribuição acumulada
A função quantil

- Exemplo 3.3.9 (continuação):

Table 3.1 Quantile function for Example 3.3.9

p	$F^{-1}(p)$
(0, 0.1681]	0
(0.1681, 0.5283]	1
(0.5283, 0.8370]	2
(0.8370, 0.9693]	3
(0.9693, 0.9977]	4
(0.9977, 1)	5

3.3 Função de distribuição acumulada
A função quantil

- **Definição 3.3.3: Mediana / quartis**
  O quartil ½ ou 50º percentil de uma distribuição é denominado sua *mediana*.
  O quantil ¼ ou 25º percentil de uma distribuição é denominado seu *quartil inferior*.
  O quantil ¾ ou 75º percentil de uma distribuição é denominado seu *quartil superior*.

- Obs: A mediana é uma medida resumo bastante popular.
  - Lembre que o quantil ½ é o menor número x tal que $F(x) \geq 1/2$.
  - Para algumas distribuições (usualmente discretas), há um intervalo de números $[x_1, x_2)$ tal que, para todo $x \in [x_1, x_2), F(x) = 1/2$. Nesse caso, há duas convenções possíveis:
    - Considerar quaisquer valores nesse intervalo (incluindo x_2) como medianas da distribuição;
    - Considerar o valor $(x_1 + x_2)/2$ como a mediana.

3.3 Função de distribuição acumulada
A função quantil

- Quantis são úteis para sumarizar distribuições em termos de onde está a probabilidade.
  - Por exemplo, se queremos expressar onde a metade central de uma distribuição está, podemos dizer que se encontra entre os quantis 0,25 e 0,75.
- Dessa forma, a função quantil é uma forma alternativa de caracterizar uma distribuição.

3.4 Distribuições bivariadas

- Generalizamos a seguir o conceito de distribuição de uma variável aleatória para o conceito de distribuição conjunta de duas variáveis aleatórias.
- Com isso, introduzimos:
  - a f.p. conjunta para duas variáveis aleatórias discretas;
  - a f.d.p. conjunta para duas variáveis aleatórias contínuas;
  - a f.d.a. conjunta para duas variáveis aleatórias quaisquer.
  - Distribuições mistas (com uma variável discreta e uma contínua) também serão tratadas.

3.4 Distribuições bivariadas

- **Definição 3.4.1: Distribuição conjunta / bivariada**
  Sejam X e Y variáveis aleatórias. A *distribuição conjunta* ou *distribuição bivariada* de X e Y é a coleção de todas as probabilidades da forma $\Pr[(X, Y) \in C]$ para todos os conjuntos C de pares de números reais tais que $\{(X, Y) \in C\}$ é um evento.

3.4 Distribuições bivariadas

- Exemplo 3.4.1:

Demands for Utilities. In Example 3.1.5, we found the distribution of the random variable X that represented the demand for water. But there is another random variable, Y, the demand for electricity, that is also of interest. When discussing two random variables at once, it is often convenient to put them together into an ordered pair, (X, Y). As early as Example 1.5.4 on page 19, we actually calculated some probabilities associated with the pair (X, Y). In that example, we defined two events A and B that we now can express as $A = \{X \geq 115\}$ and $B = \{Y \geq 110\}$. In Example 1.5.4, we computed $\Pr(A \cap B)$ and $\Pr(A \cup B)$. We can express $A \cap B$ and $A \cup B$ as events involving the pair (X, Y). For example, define the set of ordered pairs $C = \{(x, y) : x \geq 115 \text{ and } y \geq 110\}$ so that that the event $\{(X, Y) \in C)\} = A \cap B$. That is, the event that the pair of random variables lies in the set C is the same as the intersection of the two events A and B. In Example 1.5.4, we computed $\Pr(A \cap B) = 0.1198$. So, we can now assert that $\Pr((X, Y) \in C) = 0.1198$. ◀

3.4 Distribuições bivariadas

- Exemplo 3.4.2:

Theater Patrons. Suppose that a sample of 10 people is selected at random from a theater with 200 patrons. One random variable of interest might be the number X of people in the sample who are over 60 years of age, and another random variable might be the number Y of people in the sample who live more than 25 miles from the theater. For each ordered pair (x, y) with $x = 0, \ldots, 10$ and $y = 0, \ldots, 10$, we might wish to compute $\Pr((X, Y) = (x, y))$, the probability that there are x people in the sample who are over 60 years of age and there are y people in the sample who live more than 25 miles away. ◀

3.4 Distribuições bivariadas
Distribuições conjuntas discretas

- **Definição 3.4.2: Distribuição conjunta discreta**
  Sejam X e Y variáveis aleatórias, e considere o par ordenado (X, Y). Se existe apenas um número finito ou no máximo contável de possíveis valores (x, y) para o par (X, Y), então dizemos que X e Y possuem uma *distribuição conjunta discreta*.

- As duas variáveis aleatórias no Exemplo 3.4.2 possuem uma distribuição conjunta discreta.

- **Teorema 3.4.1:** Suponha que duas variáveis aleatórias X e Y possuam, cada uma, uma distribuição discreta. Então X e Y possuem uma distribuição conjunta discreta.
  - Argumento da demonstração: produto cartesiano de dois conjuntos contáveis é contável.

3.4 Distribuições bivariadas
Distribuições conjuntas discretas

- **Definição 3.4.3: Função de probabilidade conjunta**
  A *função de probabilidade conjunta* (abreviada por *f.p. conjunta* ou *joint p.f*) de X e Y é definida como a função f tal que, para cada ponto (x, y) no plano xy,
  $$f(x, y) = \Pr(X = x \text{ e } Y = y)\,.$$

- **Teorema 3.4.2:** Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuição conjunta discreta. Se (x, y) não é um dos possíveis valores do par (X, Y), então $f(x, y) = 0$. Também,
  $$\sum_{\text{All } (x,y)} f(x, y) = 1.$$
  Finalmente, para cada conjunto C de pares ordenados,
  $$\Pr[(X, Y) \in C] = \sum_{(x,y)\in C} f(x, y).$$

3.4 Distribuições bivariadas
Distribuições conjuntas discretas

- Exemplo 3.4.3:

Specifying a Discrete Joint Distribution by a Table of Probabilities. In a certain suburban area, each household reported the number of cars and the number of television sets that they owned. Let X stand for the number of cars owned by a randomly selected household in this area. Let Y stand for the number of television sets owned by that same randomly selected household. In this case, X takes only the values 1, 2, and 3; Y takes only the values 1, 2, 3, and 4; and the joint p.f. f of X and Y is as specified in Table 3.2.

Table 3.2 Joint p.f. $f(x, y)$ for Example 3.4.3

	y			
x	1	2	3	4
1	0.1	0	0.1	0
2	0.3	0	0.1	0.2
3	0	0.2	0	0

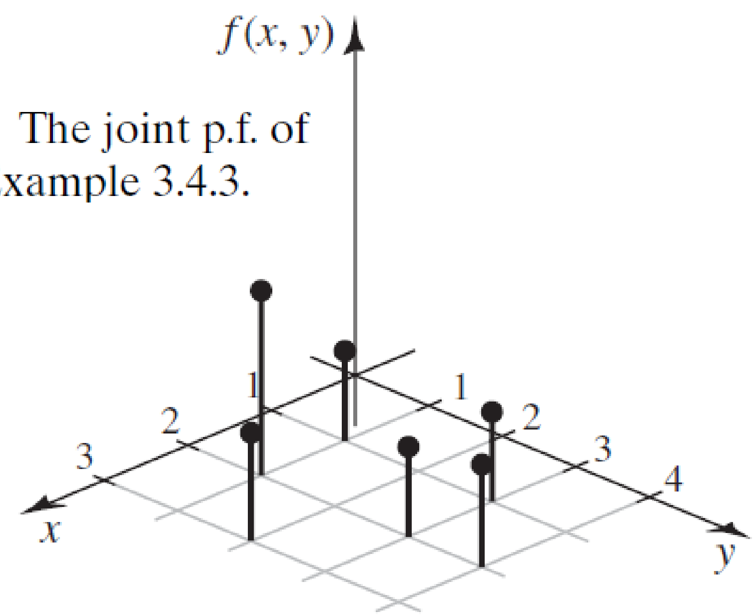


Figure 3.10 The joint p.f. of X and Y in Example 3.4.3.

3.4 Distribuições bivariadas
Distribuições conjuntas discretas

- Exemplo 3.4.3 (continuação):

This joint p.f. is sketched in Fig. 3.10. We shall determine the probability that the randomly selected household owns at least two of both cars and televisions. In symbols, this is $\Pr(X \geq 2 \text{ and } Y \geq 2)$.

By summing $f(x, y)$ over all values of $x \geq 2$ and $y \geq 2$, we obtain the value

$$\begin{aligned}\Pr(X \geq 2 \text{ and } Y \geq 2) &= f(2,2) + f(2,3) + f(2,4) + f(3,2) \\ &\quad + f(3,3) + f(3,4) \\ &= 0.5.\end{aligned}$$

Next, we shall determine the probability that the randomly selected household owns exactly one car, namely $\Pr(X = 1)$. By summing the probabilities in the first row of the table, we obtain the value

$$\Pr(X = 1) = \sum_{y=1}^{4} f(1, y) = 0.2. \qquad \blacktriangleleft$$

3.4 Distribuições bivariadas
Distribuições conjuntas contínuas

- Exemplo 3.4.4:

Demands for Utilities. Consider again the joint distribution of X and Y in Example 3.4.1. When we first calculated probabilities for these two random variables back in Example 1.5.4 on page 19 (even before we named them or called them random variables), we assumed that the probability of each subset of the sample space was proportional to the area of the subset. Since the area of the sample space is 29,204, the probability that the pair (X, Y) lies in a region C is the area of C divided by 29,204. We can also write this relation as

$$\Pr((X, Y) \in C\} = \int_C \int \frac{1}{29{,}204}\, dx\, dy, \tag{3.4.1}$$

assuming that the integral exists. ◀

3.4 Distribuições bivariadas
Distribuições conjuntas contínuas

- **Definição 3.4.4: Distribuição conjunta contínua / f.d.p. conjunta / suporte**
  Duas variáveis *X* e *Y* possuem uma *distribuição conjunta contínua* se existe uma função não negativa f definida sobre todo o plano xy tal que, para cada subconjunto *C* do plano,
  $$\Pr[(X,Y) \in C] = \iint_C f(x,y)\ dx\, dy\,,$$
  se a integral existe.
  A função f é denominada a *função de densidade de probabilidade conjunta* (abreviada *f.d.p. conjunta* ou *joint p.d.f*) de *X* e *Y*.
  O fecho do conjunto $\{(x,y) : f(x,y) > 0\}$ é denominado *suporte da distribuição* (ou *suporte de*) (X,Y).

3.4 Distribuições bivariadas
Distribuições conjuntas contínuas

- Exemplo 3.4.5:

Demands for Utilities. In Example 3.4.4, it is clear from Eq. (3.4.1) that the joint p.d.f. of X and Y is the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{29{,}204} & \text{for } 4 \le x \le 200 \text{ and } 1 \le y \le 150, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad (3.4.2)$$

◀

- **Teorema 3.4.3:** Uma f.d.p. conjunta deve satisfazer as seguintes condições:

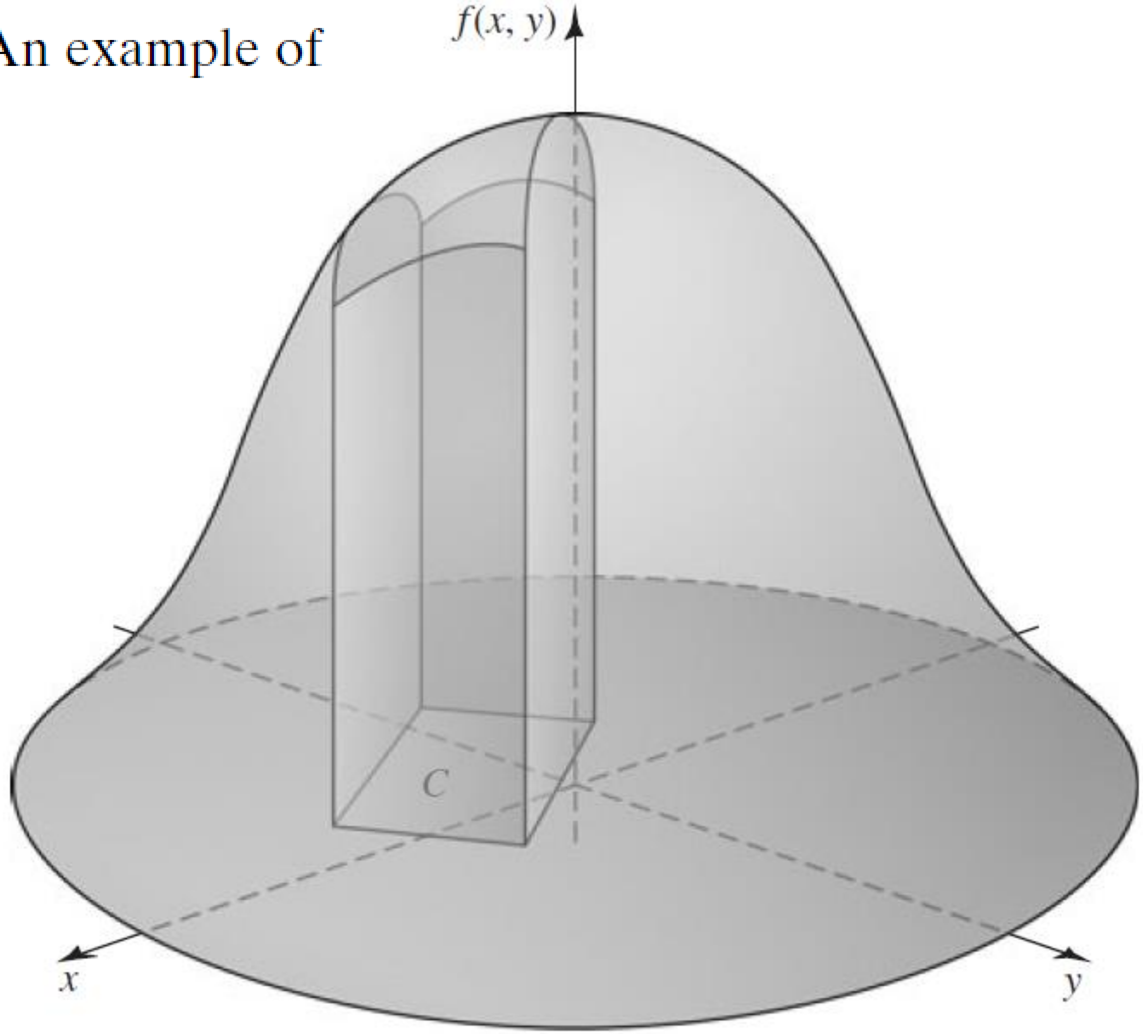
$$f(x, y) \ge 0 \quad \text{for } -\infty < x < \infty \text{ and } -\infty < y < \infty,$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

3.4 Distribuições bivariadas
Distribuições conjuntas contínuas

Figure 3.11 An example of a joint p.d.f.



3.4 Distribuições bivariadas
Distribuições conjuntas contínuas

- Observação:
  - Vimos anteriormente que, se X e Y variáveis aleatórias discretas, sua função de probabilidade conjunta também é discreta.
  - No caso de variáveis aleatórias contínuas:
    - Se a distribuição de probabilidade conjunta de X e Y for contínua, então X e Y possuem, cada uma, distribuição contínua;
    - Todavia, se X e Y tiverem distribuições contínuas, não necessariamente sua distribuição conjunta será contínua.

3.4 Distribuições bivariadas
Distribuições bivariadas mistas

- Discutimos anteriormente distribuições bivariadas que são ou discretas ou contínuas. Ocasionalmente, pode ser necessário considerar uma distribuição bivariada mista em que uma variável aleatória é discreta e outra é contínua.
- Exemplo 3.4.10:

A Clinical Trial. Consider a clinical trial (such as the one described in Example 2.1.12) in which each patient with depression receives a treatment and is followed to see whether they have a relapse into depression. Let X be the indicator of whether or not the first patient is a "success" (no relapse). That is $X = 1$ if the patient does not relapse and $X = 0$ if the patient relapses. Also, let P be the proportion of patients who have no replapse among all patients who might receive the treatment. It is clear that X must have a discrete distribution, but it might be sensible to think of P as a continuous random variable taking its value anywhere in the interval $[0, 1]$. Even though X and P can have neither a joint discrete distribution nor a joint continuous distribution, we can still be interested in the joint distribution of X and P. ◀

3.4 Distribuições bivariadas
Distribuições bivariadas mistas

- **Definição 3.4.5: f.p / f.d.p conjunta**
  Sejam *X* e *Y* variáveis aleatórias tais que *X* é discreta e *Y* é contínua. Suponha que exista uma função $f(x, y)$ definida no plano xy tal que, para cada par *A* e *B* de subconjuntos dos números reais,

$$\Pr(X \in A \text{ and } Y \in B) = \int_B \sum_{x \in A} f(x, y) dy, \tag{3.4.4}$$

  se a integral existe. Então a função f é denominada a f.p./f.d.a. conjunta de *X* e *Y*.

3.4 Distribuições bivariadas
Distribuições bivariadas mistas

- Toda f.p./f.d.p. conjunta deve satisfazer duas condições. Se X é a variável aleatória discreta com valores possíveis $x_1, x_2, \ldots$ e Y é a variável aleatória contínua, então $f(x, y) \geq 0$ para todo x, y e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i, y) dy = 1. \qquad (3.4.5)$$

- Como f é não negativa, a soma e a integral nas Equações 3.4.4 e 3.4.5 podem ser feitas na ordem que for mais conveniente.

3.4 Distribuições bivariadas
Distribuições bivariadas mistas

- Nota: Probabilidades de conjuntos mais gerais: Para um conjunto geral C de pares de números reais, podemos computar $\Pr[(X,Y) \in C]$ usando a f.p./f.d.p. conjunta de X e Y.
  - Para cada x, seja $C_x = \{y : (x,y) \in C\}$. Então
    $$\Pr((X,Y) \in C) = \sum_{\text{All } x} \int_{C_x} f(x,y)dy,$$
    se todas as integrais existem
  - Alternativamente, para cada y, seja $C^y = \{x : (x,y) \in C\}$, e então
    $$\Pr((X,Y) \in C) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{x \in C^y} f(x,y) \right] dy,$$
    se a integral existe.

3.4 Distribuições bivariadas
Distribuições bivariadas mistas

- Exemplo 3.4.11:

A Joint p.f./p.d.f. Suppose that the joint p.f./p.d.f. of X and Y is

$$f(x, y) = \frac{xy^{x-1}}{3}, \quad \text{for } x = 1, 2, 3 \text{ and } 0 < y < 1.$$

We should check to make sure that this function satisfies (3.4.5). It is easier to integrate over the y values first, so we compute

$$\sum_{x=1}^{3} \int_0^1 \frac{xy^{x-1}}{3} dy = \sum_{x=1}^{3} \frac{1}{3} = 1.$$

Suppose that we wish to compute the probability that $Y \geq 1/2$ and $X \geq 2$. That is, we want $\Pr(X \in A \text{ and } Y \in B)$ with $A = [2, \infty)$ and $B = [1/2, \infty)$. So, we apply Eq. (3.4.4) to get the probability

$$\sum_{x=2}^{3} \int_{1/2}^1 \frac{xy^{x-1}}{3} dy = \sum_{x=2}^{3} \left(\frac{1 - (1/2)^x}{3} \right) = 0.5417.$$

3.4 Distribuições bivariadas
Distribuições bivariadas mistas

- Exemplo 3.4.11 (continuação):

For illustration, we shall compute the sum and integral in the other order also. For each $y \in [1/2, 1)$, $\sum_{x=2}^{3} f(x, y) = 2y/3 + y^2$. For $y \geq 1/2$, the sum is 0. So, the probability is

$$\int_{1/2}^{1} \left[\frac{2}{3}y + y^2\right] dy = \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = 0.5417. \quad \blacktriangleleft$$

3.4 Distribuições bivariadas
Funções de distribuições acumuladas bivariadas

- **Definição 3.4.6: Função de distribuição acumulada conjunta**
A *função de distribuição conjunta* ou *função de distribuição acumulada conjunta* (*f.d.a. conjunta* ou *joint c.d.f.*) de duas variáveis aleatórias *X* e *Y* é definida como a função F tal que, para todos os valores de x e y ($-\infty < x < \infty$ e $-\infty < y < \infty$),
$$F(x, y) = \Pr(X \leq x \text{ e } Y \leq y).$$

- **Observação 1:**
Da Definição 3.4.6, é claro que $F(x, y)$ é monotonicamente não decrescente em x para cada y fixado e monotonicamente não decrescente em y para cada x fixado.

3.4 Distribuições bivariadas
Funções de distribuições acumuladas bivariadas

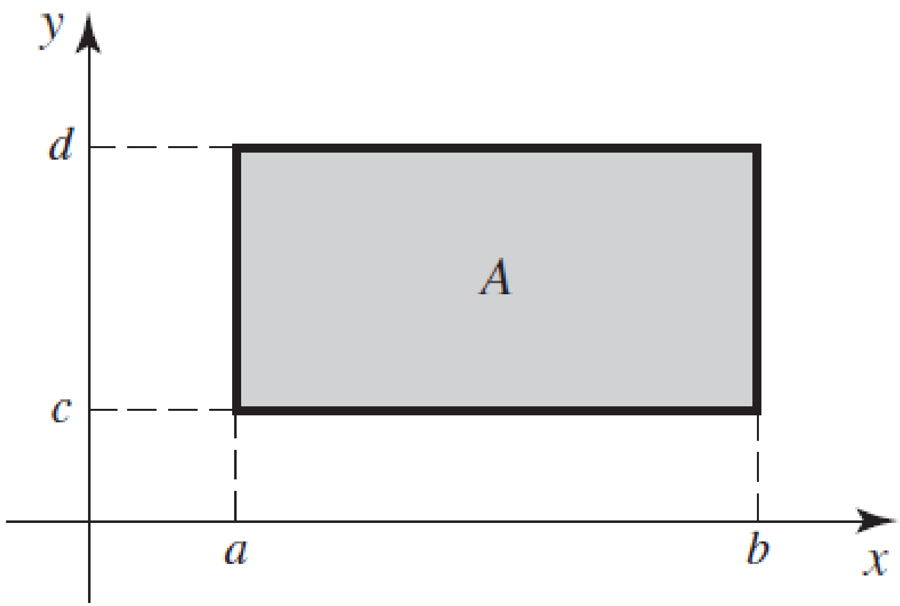
- **Observação 2:**
  Se a f.d.a. conjunta de duas variáveis aleatórias arbitrárias X e Y é F, então a probabilidade do par (X, Y) estar em um retângulo específico no plano xy pode ser obtida de F como segue: Para os limites especificados $a < b$ e c $< d$,

$$\begin{aligned}
&\Pr(a < X \le b \text{ and } c < Y \le d) \\
&\quad = \Pr(a < X \le b \text{ and } Y \le d) - \Pr(a < X \le b \text{ and } Y \le c) \\
&\quad = [\Pr(X \le b \text{ and } Y \le d) - \Pr(X \le a \text{ and } Y \le d)] \\
&\qquad\quad - [\Pr(X \le b \text{ and } Y \le c) - \Pr(X \le a \text{ and } Y \le c)] \\
&\quad = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c).
\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

  Logo, a probabilidade do retângulo C representado na Fig. 3.14 (próximo slide) é dada pela combinação de valores de F derivada acima.

3.4 Distribuições bivariadas
Funções de distribuições acumuladas bivariadas

Figure 3.14 The probability of a rectangle.



3.4 Distribuições bivariadas
Funções de distribuições acumuladas bivariadas

- **Observação 3: Obtenção da f.d.a. a partir da d.f.p e vice-versa:**
  Se X e Y possuem distribuição conjunta contínua com f.d.p. conjunta f, então a f.d.a. conjunta em (x, y) é

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(r, s)\, dr\, ds.$$

  (Os símbolos r e s denotam variáveis auxiliares de integração; a ordem de integração sobre x e y pode ser invertida)
  A f.d.p. conjunta pode ser derivada da f.d.a. conjunta usando as relações

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x}$$

  em todo ponto (x,y) para o qual essas derivações de segunda ordem existem.

3.4 Distribuições bivariadas
Funções de distribuições acumuladas bivariadas

- **Teorema 3.4.5:** Suponha que X e Y possuam f.d.a. conjunta F. A f.d.a. F_1 apenas da variável aleatória simples X pode ser derivada da f.d.a. conjunta F como
$$F_1(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y).$$
Analogamente, a f.d.a. F_2 de Y é igual a
$$F_2(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y).$$
  - Uma forma de verificar esse teorema para variáveis aleatórias com distribuições contínuas é usar a Observação 3:
  Se X e Y possuem f.d.p. f, então:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(r,s)\,dr\ \,ds = \int_{-\infty}^{x}\lim_{y\to\infty}\int_{-\infty}^{y} f(r,s)\,dr\,ds = \lim_{y\to\infty} F(x,y);$$

analogamente,

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f(r,s)\,dr\,ds = \int_{-\infty}^{y}\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{x} f(r,s)\,dr\,ds = \lim_{x\to\infty} F(x,y)\,.$$

3.4 Distribuições bivariadas
Funções de distribuições acumuladas bivariadas

- Exemplo 3.4.14 para a Observação 3 e o Teorema 3.4.5:

Determining a Joint p.d.f. from a Joint c.d.f. Suppose that X and Y are random variables that take values only in the intervals $0 \le X \le 2$ and $0 \le Y \le 2$. Suppose also that the joint c.d.f. of X and Y, for $0 \le x \le 2$ and $0 \le y \le 2$, is as follows:

$$F(x, y) = \frac{1}{16} xy(x + y). \tag{3.4.7}$$

We shall first determine the c.d.f. F_1 of just the random variable X and then determine the joint p.d.f. f of X and Y.

The value of $F(x, y)$ at any point (x, y) in the xy-plane that does not represent a pair of possible values of X and Y can be calculated from (3.4.7) and the fact that $F(x, y) = \Pr(X \le x \text{ and } Y \le y)$. Thus, if either $x < 0$ or $y < 0$, then $F(x, y) = 0$. If both $x > 2$ and $y > 2$, then $F(x, y) = 1$. If $0 \le x \le 2$ and $y > 2$, then $F(x, y) = F(x, 2)$, and it follows from Eq. (3.4.7) that

$$F(x, y) = \frac{1}{8} x(x + 2).$$

Similarly, if $0 \le y \le 2$ and $x > 2$, then

$$F(x, y) = \frac{1}{8} y(y + 2).$$

3.4 Distribuições bivariadas
Funções de distribuições acumuladas bivariadas

- Exemplo 3.4.14 (cont):

The function $F(x, y)$ has now been specified for every point in the xy-plane. By letting $y \to \infty$, we find that the c.d.f. of just the random variable X is

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0, \\ \frac{1}{8}x(x+2) & \text{for } 0 \le x \le 2, \\ 1 & \text{for } x > 2. \end{cases}$$

Furthermore, for $0 < x < 2$ and $0 < y < 2$,

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{8}(x + y).$$

Also, if $x < 0$, $y < 0$, $x > 2$, or $y > 2$, then

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = 0.$$

3.4 Distribuições bivariadas
Funções de distribuições acumuladas bivariadas

- Exemplo 3.4.14 (cont):

Hence, the joint p.d.f. of X and Y is

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x + y) & \text{for } 0 < x < 2 \text{ and } 0 < y < 2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \blacktriangleleft$$

3.4 Distribuições bivariadas
Funções de distribuições acumuladas bivariadas

- Exemplo 3.4.15:

Demands for Utilities. We can compute the joint c.d.f. for water and electric demand in Example 3.4.4 by using the joint p.d.f. that was given in Eq. (3.4.2). If either $x \le 4$ or $y \le 1$, then $F(x, y) = 0$ because either $X \le x$ or $Y \le y$ would be impossible. Similarly, if both $x \ge 200$ and $y \ge 150$, $F(x, y) = 1$ because both $X \le x$ and $Y \le y$ would be sure events. For other values of x and y, we compute

$$F(x, y) = \begin{cases} \displaystyle\int_4^x \int_1^y \frac{1}{29{,}204} dy dx = \frac{xy}{29{,}204} & \text{for } 4 \le x \le 200,\ 1 \le y \le 150, \\ \displaystyle\int_4^x \int_1^{150} \frac{1}{29{,}204} dy dx = \frac{x}{196} & \text{for } 4 \le x \le 200,\ y > 150, \\ \displaystyle\int_4^{200} \int_1^y \frac{1}{29{,}204} dy dx = \frac{y}{149} & \text{for } x > 200,\ 1 \le y \le 150. \end{cases}$$

3.4 Distribuições bivariadas
Funções de distribuições acumuladas bivariadas

- Exemplo 3.4.15 (cont):

The reason that we need three cases in the formula for $F(x, y)$ is that the joint p.d.f. in Eq. (3.4.2) drops to 0 when x crosses above 200 or when y crosses above 150; hence, we never want to integrate 1/29,204 beyond $x = 200$ or beyond $y = 150$. If one takes the limit as $y \to \infty$ of $F(x, y)$ (for fixed $4 \le x \le 200$), one gets the second case in the formula above, which then is the c.d.f. of X, $F_1(x)$. Similarly, if one takes the $\lim_{x\to\infty} F(x, y)$ (for fixed $1 \le y \le 150$), one gets the third case in the formula, which then is the c.d.f. of Y, $F_2(y)$. ◀

3.5 Distribuições marginais

- Anteriormente neste capítulo, foi introduzido o conceito de distribuições para variáveis aleatórias, e na Seção 3.4 foi discutida a generalização para distribuições conjuntas para duas variáveis simultaneamente.
- Frequentemente, partimos de uma distribuição conjunta para duas variáveis e queremos encontrar a distribuição de apenas uma delas.
- A distribuição de uma variável X obtida de uma distribuição conjunta é também denominada a distribuição marginal de X.
  - Cada variável terá uma f.d.a. marginal, bem como uma f.d.p. (ou f.p.) marginal
- Nesta seção será introduzido também o conceito de variáveis aleatórias independentes, o qual é uma generalização natural de eventos independentes.

3.5 Distribuições marginais
Derivando uma f.p. marginal ou uma f.d.p. marginal

- Vimos no Teorema 3.4.5 que, se a f.d.a. conjunta de duas variáveis aleatórias X e Y é conhecida, então a f.d.a. F_1 da variável aleatória X pode ser derivada de F.
- Vimos um exemplo dessa derivação no Exemplo 3.4.15.
- Se X tem uma distribuição contínua, podemos também derivar a f.d.p. de X a partir da distribuição conjunta.

3.5 Distribuições marginais
Derivando uma f.p. marginal ou uma f.d.p. marginal

- Exemplo 3.5.1:

Demands for Utilities. Look carefully at the formula for $F(x, y)$ in Example 3.4.15, specifically the last two branches that we identified as $F_1(x)$ and $F_2(y)$, the c.d.f.'s of the two individual random variables X and Y. It is apparent from those two formulas and Theorem 3.3.5 that the p.d.f. of X alone is

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{196} & \text{for } 4 \le x \le 200, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

which matches what we already found in Example 3.2.1. Similarly, the p.d.f. of Y alone is

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{149} & \text{for } 1 \le y \le 150, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

◀

3.5 Distribuições marginais
Derivando uma f.p. marginal ou uma f.d.p. marginal

- As ideias empregadas no exemplo 3.5.1 levam à definição a seguir.

- **Definição 3.5.1: f.d.a./f.p./f.d.p. marginal**
  Suponha que X e Y possuam uma distribuição conjunta. A f.d.a. de X derivada pelo Teorema 3.4.5 é denominada *f.d.a. marginal* de X.
  Similarmente, a f.p. ou f.d.p. de X associada com a f.d.a. de *X* é denominada *f.p. marginal* ou *f.d.p. marginal* de *X*.

- O teorema a seguir indica como obter distribuições marginais para variáveis aleatórias discretas.

3.5 Distribuições marginais
Derivando uma f.p. marginal ou uma f.d.p. marginal

- **Teorema 3.5.1:** Se *X* e *Y* possuem uma distribuição conjunta discreta para a qual a f.p. conjunta é f, então a f.p. marginal f_1 de X é

$$f_1(x) = \sum_{\forall y} f(x, y). \qquad (3.5.1)$$

Analogamente, a f.p. marginal f_2 de Y é

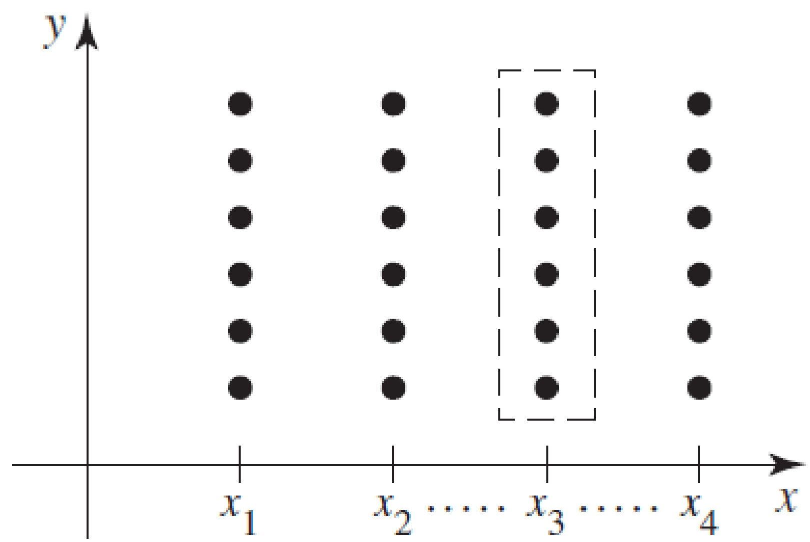
$$f_2(y) = \sum_{\forall x} f(x, y).$$

  – Dem: Apresentamos o resultado para f_1, já que para f_2 o raciocínio é análogo. Uma ilustração da prova está na Figura 3.15, na qual o conjunto de pontos na caixa tracejada é o conjunto de pares com primeira coordenada x. O evento $\{X = x\}$ pode ser expressado como a união dos eventos representados pelos pares na caixa tracejada, denotados por $B_y = \{X = x \text{ e } Y = y\}$ para todo valor possível y. Os eventos B_y são disjuntos e $\Pr(B_y) = f(x, y)$. Uma vez que $\Pr(X = x) = \sum_{\forall y} f(x, y)$, então vale a Equação 3.5.1.

3.5 Distribuições marginais
Derivando uma f.p. marginal ou uma f.d.p. marginal

- **Teorema 3.5.1 (cont):**

Figure 3.15 Computing $f_1(x)$ from the joint p.f.



3.5 Distribuições marginais
Derivando uma f.p. marginal ou uma f.d.p. marginal

- Exemplo 3.5.2:

Deriving a Marginal p.f. from a Table of Probabilities. Suppose that X and Y are the random variables in Example 3.4.3 on page 119. These are respectively the numbers of cars and televisions owned by a radomly selected household in a certain suburban area. Table 3.2 on page 119 gives their joint p.f., and we repeat that table in Table 3.4 together with row and column totals added to the margins.

The marginal p.f. f_1 of X can be read from the row totals of Table 3.4. The numbers were obtained by summing the values in each row of this table from the four columns in the central part of the table (those labeled $y = 1, 2, 3, 4$). In this way, it is found that $f_1(1) = 0.2$, $f_1(2) = 0.6$, $f_1(3) = 0.2$, and $f_1(x) = 0$ for all other values of x. This marginal p.f. gives the probabilities that a randomly selected household owns 1, 2, or 3 cars. Similarly, the marginal p.f. f_2 of Y, the probabilities that a household owns 1, 2, 3, or 4 televisions, can be read from the column totals. These numbers were obtained by adding the numbers in each of the columns from the three rows in the central part of the table (those labeled $x = 1, 2, 3$.) ◀

3.5 Distribuições marginais
Derivando uma f.p. marginal ou uma f.d.p. marginal

- Exemplo 3.5.2 (cont):

Table 3.4 Joint p.f. $f(x, y)$ with marginal p.f.'s for Example 3.5.2

x	y: 1	2	3	4	Total
1	0.1	0	0.1	0	0.2
2	0.3	0	0.1	0.2	0.6
3	0	0.2	0	0	0.2
Total	0.4	0.2	0.2	0.2	1.0

- O termo *distribuição marginal* deriva do fato de que as distribuições marginais correspondem aos totais que aparecem nas margens de tabelas como a Tabela 3.4.

3.5 Distribuições marginais
Derivando uma f.p. marginal ou uma f.d.p. marginal

- O teorema a seguir indica como obter distribuições marginais para variáveis com distribuições conjuntas contínuas.

- **Teorema 3.5.2:** Se *X* e *Y* possuem uma distribuição conjunta contínua com f.d.p. conjunta *f*, então a f.d.p. marginal f_1 de *X* é

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy \quad \text{for } -\infty < x < \infty. \tag{3.5.2}$$

Analogamente, a f.d.p. marginal f_2 de *Y* é

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx \quad \text{for } -\infty < y < \infty. \tag{3.5.3}$$

3.5 Distribuições marginais
Derivando uma f.p. marginal ou uma f.d.p. marginal

- **Teorema 3.5.2 (cont):**
  - Dem: Será apresentada a prova da Eq. (3.5.2), já que a prova de (3.5.3) é similar. Para cada x, $\Pr(X \leq x)$ pode ser escrita como $\Pr[(X,Y) \in C]$, onde $C = \{(r,s): r \leq x, -\infty < s < \infty\}$. Podemos computar essa probabilidade diretamente da f.d.p. conjunta de *X* e *Y* como:

$$\begin{aligned}\Pr((X,Y) \in C) &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(r,s)\,ds\,dr \\ &= \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(r,s)\,ds\right] dr\end{aligned} \qquad (3.5.4)$$

A integral interna na última expressão da Eq. (3.5.4) é uma função de r e pode ser facilmente reconhecida como $f_1(r)$, onde f_1 é definida na Eq. (3.5.2). Segue que $\Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(r)\,dr$, de modo que f_1 é a f.d.p. marginal de X.

3.5 Distribuições marginais
Derivando uma f.p. marginal ou uma f.d.p. marginal

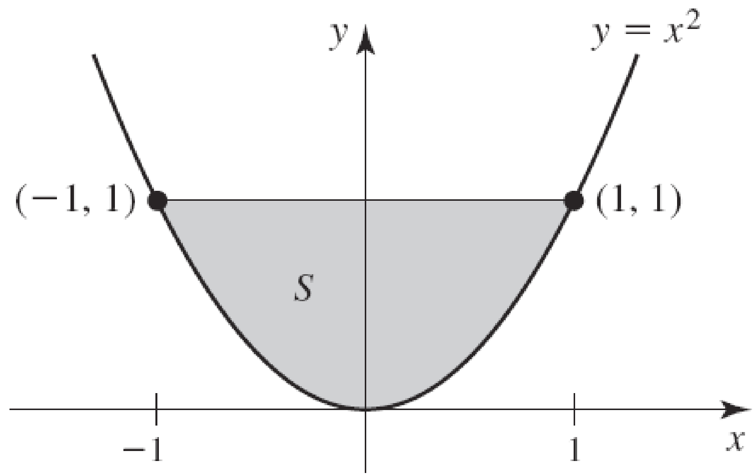
- Exemplo 3.5.3:

Deriving a Marginal p.d.f. Suppose that the joint p.d.f. of X and Y is as specified in Example 3.4.8, namely,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{21}{4}x^2 y & \text{for } x^2 \le y \le 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The set S of points (x, y) for which $f(x, y) > 0$ is sketched in Fig. 3.16. We shall determine first the marginal p.d.f. f_1 of X and then the marginal p.d.f. f_2 of Y.

Figure 3.16 The set S where $f(x, y) > 0$ in Example 3.5.3.



3.5 Distribuições marginais
Derivando uma f.p. marginal ou uma f.d.p. marginal

- Exemplo 3.5.3 (cont):

It can be seen from Fig. 3.16 that X cannot take any value outside the interval $[-1, 1]$. Therefore, $f_1(x) = 0$ for $x < -1$ or $x > 1$. Furthermore, for $-1 \le x \le 1$, it is seen from Fig. 3.16 that $f(x, y) = 0$ unless $x^2 \le y \le 1$. Therefore, for $-1 \le x \le 1$,

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \int_{x^2}^{1} \left(\frac{21}{4}\right) x^2 y\, dy = \left(\frac{21}{8}\right) x^2(1 - x^4).$$

This marginal p.d.f. of X is sketched in Fig. 3.17.

Next, it can be seen from Fig. 3.16 that Y cannot take any value outside the interval $[0, 1]$. Therefore, $f_2(y) = 0$ for $y < 0$ or $y > 1$. Furthermore, for $0 \le y \le 1$, it is seen from Fig. 3.12 that $f(x, y) = 0$ unless $-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}$. Therefore, for $0 \le y \le 1$,

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \left(\frac{21}{4}\right) x^2 y\, dx = \left(\frac{7}{2}\right) y^{5/2}.$$

This marginal p.d.f. of Y is sketched in Fig. 3.18. ◄

3.5 Distribuições marginais
Derivando uma f.p. marginal ou uma f.d.p. marginal

- Exemplo 3.5.3 (cont):

Figure 3.17 The marginal p.d.f. of X in Example 3.5.3.

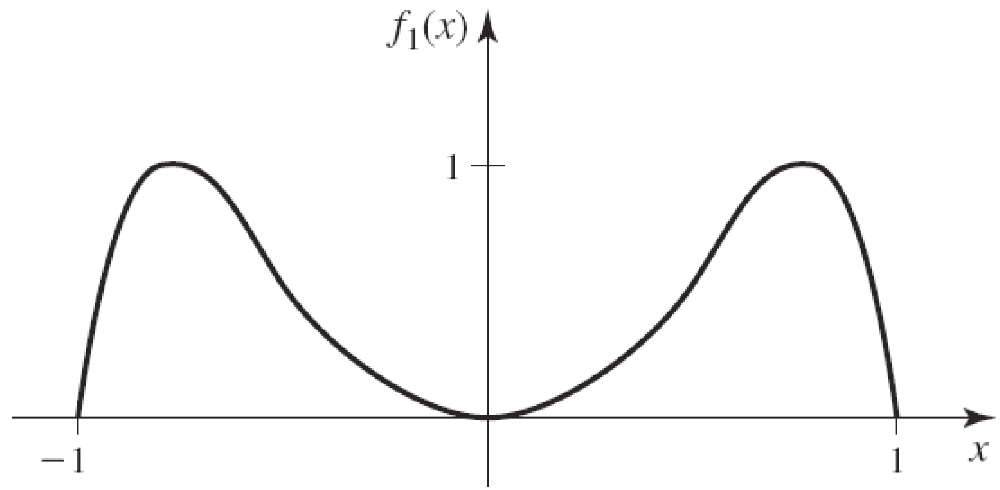
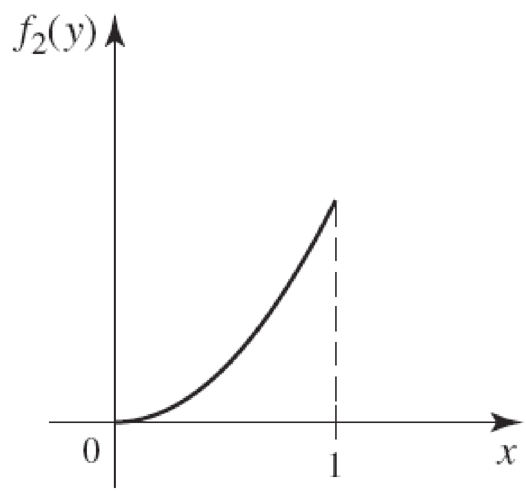


Figure 3.18 The marginal p.d.f. of Y in Example 3.5.3.



3.5 Distribuições marginais
Derivando uma f.p. marginal ou uma f.d.p. marginal

- Se X possui distribuição discreta e Y distribuição contínua, pode-se derivar a f.p. marginal de X e a f.d.p. marginal de Y da f.p./f.d.p. conjunta de forma análoga à derivação de uma f.p. (Teorema 3.5.1) ou de uma f.d.p. (Teorema 3.5.2).
Esse resultado é apresentado no teorema abaixo.

- **Teorema 3.5.3:** Seja *f* a f.p./f.d.p. conjunta de *X* e *Y*, com *X* discreta e *Y* contínua. Então a f.p. marginal de *X* é

$$f_1(x) = \Pr(X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy, \quad \text{for all } x,$$

e a f.d.p. marginal de *Y* é

$$f_2(y) = \sum_x f(x, y), \quad \text{for } -\infty < y < \infty.$$

3.5 Distribuições marginais
Derivando uma f.p. marginal ou uma f.d.p. marginal

- Exemplo 3.5.4:

Determining a Marginal p.f. and Marginal p.d.f. from a Joint p.f./p.d.f. Suppose that the joint p.f./p.d.f. of X and Y is as in Example 3.4.11 on page 124. The marginal p.f. of X is obtained by integrating

$$f_1(x) = \int_0^1 \frac{xy^{x-1}}{3} dy = \frac{1}{3},$$

for $x = 1, 2, 3$. The marginal p.d.f. of Y is obtained by summing

$$f_2(y) = \frac{1}{3} + \frac{2y}{3} + y^2, \quad \text{for } 0 < y < 1. \qquad \blacktriangleleft$$

3.5 Distribuições marginais
Derivando uma f.p. marginal ou uma f.d.p. marginal

- Observação final desta seção:
  - Embora as distribuições marginais de X e Y possam ser derivadas de sua distribuição conjunta, não é possível reconstruir a distribuição conjunta de X e Y a partir de suas distribuições marginais sem informação adicional.
  - Por exemplo, as f.d.p's ilustradas nas Figs. 3.17 e 3.18 não dão nenhuma informação a respeito da relação entre X e Y.

3.5 Distribuições marginais
Variáveis aleatórias independentes

- Exemplo 3.5.6:

Demands for Utilities. In Examples 3.4.15 and 3.5.1, we found the marginal c.d.f.'s of water and electric demand were, respectively,

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 4, \\ \dfrac{x}{196} & \text{for } 4 \le x \le 200, \\ 1 & \text{for } x > 200, \end{cases} \qquad F_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{for } y < 1, \\ \dfrac{y}{149} & \text{for } 1 \le y \le 150, \\ 1 & \text{for } y > 150. \end{cases}$$

The product of these two functions is precisely the same as the joint c.d.f. of X and Y given in Example 3.5.1. One consequence of this fact is that, for every x and y, $\Pr(X \le x, \text{ and } Y \le y) = \Pr(X \le x)\Pr(Y \le y)$. This equation makes X and Y an example of the next definition. ◄

3.5 Distribuições marginais
Variáveis aleatórias independentes

- **Definição 3.5.2: Variáveis aleatórias independentes**
  É dito que duas variáveis aleatórias *X* e *Y* são independentes se, para quaisquer dois conjuntos A e B de números reais tais que $\{X \in A\}$ e $\{Y \in B\}$ sejam eventos,

$$\Pr(X \in A \text{ and } Y \in B) = \Pr(X \in A)\Pr(Y \in B). \tag{3.5.5}$$

- Em outras palavras, seja *E* qualquer evento cuja ocorrência ou não ocorrência depende apenas do valor de *X* (tal como $E = \{X \in A\}$), e seja *D* qualquer evento cuja ocorrência ou não ocorrência depende apenas do valor de *Y* (tal como $D = \{Y \in B\}$). Então *X* e *Y* são variáveis aleatórias independentes se e somente se *E* e *D* são eventos independentes, para todos os eventos *E* e *D* desse tipo.

3.5 Distribuições marginais
Variáveis aleatórias independentes

- Pelo argumento anterior, se X e Y são independentes, então para quaisquer números reais *x* e *y*, deve ser verdadeiro que

$$\Pr(X \leq x \text{ and } Y \leq y) = \Pr(X \leq x) \Pr(Y \leq y). \tag{3.5.6}$$

  Além disso, como todas as probabilidades para *X* e *Y* do tipo que aparece na Eq. (3.5.5) podem ser derivadas de probabilidades do tipo que aparece na Eq. (3.5.6), pode-se mostrar que se a Eq. (3.5.6) é satisfeita para todos os valores de *x* e *y*, então *X* e *Y* devem ser independentes.

- O argumento acima pode ser sumarizado (sem demonstração) no Teorema a seguir.

3.5 Distribuições marginais
Variáveis aleatórias independentes

- **Teorema 3.5.4:** Seja F a f.d.a. acumulada de *X* e *Y*, F_1 a f.d.a. marginal de *X* e F_2 a f.d.a. marginal de *Y*. Então *X* e *Y* são independentes se e somente se, para quaisquer números reais *x* e *y*, $F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y)$.

- O Teorema a seguir estabelece uma condição necessária e suficiente sobre a f.d.p. conjunta de *X* e *Y* para que essas duas variáveis sejam independentes.

3.5 Distribuições marginais
Variáveis aleatórias independentes

- **Teorema 3.5.5:** Suponha que *X* e *Y* sejam variáveis aleatórias com uma f.p, f.d.p. ou f.p/f.d.p. conjunta *f*. Então *X* e *Y* serão independentes se e somente se *f* puder ser representada na seguinte forma para $-\infty < x < \infty$ e $-\infty < y < \infty$:
$$f(x,y) = h_1(x)\, h_2(y), \qquad (3.5.7)$$
onde h_1 é uma função não negativa apenas de *x* e h_2 é uma função não negativa apenas de *y*.

- **Corolário 3.5.1:** Duas variáveis aleatórias X e Y são independentes se e somente se a seguinte fatorização é satisfeita para quaisquer números reais x e y:
$$f(x,y) = f_1(x)\, f_2(y). \qquad (3.5.8)$$

3.5 Distribuições marginais
Variáveis aleatórias independentes

- Significado de independência:
  - Foi apresentada uma definição matemática de variáveis aleatórias independentes na Definição 3.5.2, mas não a interpretação do conceito de variáveis aleatórias independentes.
  - Note que vários conceitos associados a variáveis aleatórias têm conexão direta com eventos, e portanto a interpretação de variáveis aleatórias independentes deve ser similar à interpretação de eventos independentes.
  - Consideramos dois eventos como independentes se o conhecimento de um deles ter ocorrido não altera a probabilidade do outro evento ocorrer.
  - É mais fácil estender essa ideia a variáveis aleatórias discretas. Suponha que X e Y têm uma distribuição conjunta discreta. Se, para cada y, saber que $Y = y$ não altera nenhuma das probabilidades dos eventos $\{X = x\}$, seria natural considerar que X e Y são independentes.

3.5 Distribuições marginais
Variáveis aleatórias independentes

- Significado de independência (cont):
  - De fato, do Corolário 3.5.1 e da definição de f.p. marginal, observa-se que X e Y são independentes se e somente se, para todo *y* tal que $\Pr(Y = y) > 0$ e todo *x*, $\Pr(X = x|Y = y) = \Pr(X = x)$, ou seja, aprender o valor de *Y* não altera nenhuma das probabilidades associadas a *X*.
  - Quando definirmos formalmente distribuições condicionais na Seção 3.6 a seguir, veremos que esta interpretação de variáveis aleatórias discretas independentes se estende para todas as distribuições bivariadas.
  - Em resumo, se queremos descobrir se duas variáveis aleatórias *X* e *Y* são independentes ou não, devemos pensar se mudaríamos a distribuição de *X* depois de conhecer o valor de *Y* ou vice-versa.

3.5 Distribuições marginais
Variáveis aleatórias independentes

- Exemplo 3.5.7:

Games of Chance. A carnival game consists of rolling a fair die, tossing a fair coin two times, and recording both outcomes. Let Y stand for the number on the die, and let X stand for the number of heads in the two tosses. It seems reasonable to believe that all of the events determined by the roll of the die are independent of all of the events determined by the flips of the coin. Hence, we can assume that X and Y are independent random variables. The marginal distribution of Y is the uniform distribution on the integers $1, \ldots, 6$, while the distribution of X is the binomial distribution with parameters 2 and 1/2. The marginal p.f.'s and the joint p.f. of X and Y are given in Table 3.5, where the joint p.f. was constructed using Eq. (3.5.9). The Total column gives the marginal p.f. f_1 of X, and the Total row gives the marginal p.f. f_2 of Y. ◄

3.5 Distribuições marginais
Variáveis aleatórias independentes

- Exemplo 3.5.7 (cont.):

Table 3.5 Joint p.f. $f(x, y)$ for Example 3.5.7

	y						
x	1	2	3	4	5	6	Total
0	1/24	1/24	1/24	1/24	1/24	1/24	1/4
1	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/2
2	1/24	1/24	1/24	1/24	1/24	1/24	1/4
Total	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1.000

3.5 Distribuições marginais
Variáveis aleatórias independentes

- Exemplo 3.5.8:

Determining Whether Random Variables Are Independent in a Clinical Trial. Return to the clinical trial of depression drugs in Exercise 11 of Sec. 3.4 (on page 129). In that trial, a patient is selected at random from the 150 patients in the study and we record Y, an indicator of the treatment group for that patient, and X, an indicator of whether or not the patient relapsed. Table 3.6 repeats the joint p.f. of X and Y along with the marginal distributions in the margins. We shall determine whether or not X and Y are independent.

In Eq. (3.5.9), $f(x, y)$ is the probability in the xth row and the yth column of the table, $f_1(x)$ is the number in the Total column in the xth row, and $f_2(y)$ is the number in the Total row in the yth column. It is seen in the table that $f(1, 2) = 0.087$, while $f_1(1) = 0.513$, and $f_2(1) = 0.253$. Hence, $f(1, 2) \neq f_1(1) f_2(1) = 0.129$. It follows that X and Y are not independent. ◀

3.5 Distribuições marginais
Variáveis aleatórias independentes

- Exemplo 3.5.8 (cont.):

Table 3.6 Proportions marginals in Example 3.5.8

	Treatment group (Y)				
Response (X)	Imipramine (1)	Lithium (2)	Combination (3)	Placebo (4)	Total
Relapse (0)	0.120	0.087	0.146	0.160	0.513
No relapse (1)	0.147	0.166	0.107	0.067	0.487
Total	0.267	0.253	0.253	0.227	1.0

3.6 Distribuições condicionais

- Nesta seção, o conceito de probabilidade condicional é generalizado para distribuições condicionais.
- Note-se que distribuições são meramente coleções de probabilidades de eventos determinados por variáveis aleatórias.
- A ideia é que haverá tipicamente diversas variáveis aleatórias de interesse em um problema prático. Depois de observarmos algumas daquelas variáveis aleatórias, desejamos estar aptos a ajustar as probabilidades associadas com aquelas que ainda não foram observadas.
- A distribuição condicional de uma variável X dada outra Y será a distribuição que usaríamos para X após conhecermos o valor de Y.

3.6 Distribuições condicionais
Distribuições condicionais discretas

- Exemplo 3.6.1:

Auto Insurance. Insurance companies keep track of how likely various cars are to be stolen. Suppose that a company in a particular area computes the joint distribution of car brands and the indicator of whether the car will be stolen during a particular year that appears in Table 3.7.

We let $X = 1$ mean that a car is stolen, and we let $X = 0$ mean that the car is not stolen. We let Y take one of the values from 1 to 5 to indicate the brand of car as indicated in Table 3.7. If a customer applies for insurance for a particular brand of car, the company needs to compute the distribution of the random variable X as part of its premium determination. The insurance company might adjust their premium according to a risk factor such as likelihood of being stolen. Although, overall, the probability that a car will be stolen is 0.024, if we assume that we know the brand of car, the probability might change quite a bit. This section introduces the formal concepts for addressing this type of problem. ◀

3.6 Distribuições condicionais
Distribuições condicionais discretas

- Exemplo 3.6.1 (cont.):

Table 3.7 Joint p.f. for Example 3.6.1

	Brand Y					
Stolen X	1	2	3	4	5	Total
0	0.129	0.298	0.161	0.280	0.108	0.976
1	0.010	0.010	0.001	0.002	0.001	0.024
Total	0.139	0.308	0.162	0.282	0.109	1.000

3.6 Distribuições condicionais
Distribuições condicionais discretas

- Suponha que X e Y sejam duas variáveis aleatórias com uma distribuição conjunta cuja f.p. é f. Denotaremos, como anteriormente, por f_1 e f_2 as f.p's marginais de X e Y, respectivamente.
- Depois de observarmos que $Y = y$, a probabilidade de que a variável aleatória X terá um valor particular x é especificada pela probabilidade condicional abaixo:

$$\Pr(X = x|Y = y) = \frac{\Pr(X = x \text{ and } Y = y)}{\Pr(Y = y)}$$

$$= \frac{f(x, y)}{f_2(y)}. \qquad (3.6.1)$$

- Em outras palavras, se é sabido que $Y = y$, então a probabilidade de $\mathrm{X} = x$ será atualizado pelo valor da Eq. (3.6.1).
- A seguir, consideramos a distribuição completa de X depois de observarmos $Y = y$.

3.6 Distribuições condicionais
Distribuições condicionais discretas

- **Definição 3.6.1: Distribuição/f.p. condicional**
  Sejam *X* e *Y* variáveis aleatórias com uma distribuição conjunta discreta e f.p. conjunta *f*. Seja f_2 a f.p. de *Y*. Para cada *y* tal que $f_2(y) > 0$, defina

$$g_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}. \tag{3.6.2}$$

  Então g_1 é denominada a *f.p. condicional de X dado Y*.
  A distribuição discreta cuja f.p. é $g_1(.|y)$ é denominada a *distribuição condicional de X dado que* $Y = y$.

3.6 Distribuições condicionais
Distribuições condicionais discretas

- **Definição 3.6.1: Distribuição/f.p. condicional (cont)**
  Devemos verificar que $g_1(x|y)$ é de fato uma f.p. como uma função de *x* para cada *y*. Seja y tal que $f_2(y) > 0$. Então $g_1(x|y) \geq 0$ para todo *x* e

$$\sum_x g_1(x|y) = \frac{1}{f_2(y)} \sum_x f(x, y) = \frac{1}{f_2(y)} f_2(y) = 1.$$

  Analogamente, se x é um valor de dado de X tal que $f_1(x) = \Pr(X = x) > 0$, e se $g_2(y|x)$ é a *p.f. condicional de Y dado que* $X = x$, então

$$g_2(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}. \qquad (3.6.3)$$

  Para cada x tal que $f_1(x) > 0$, a função $g_2(y|x)$ será uma f.p. como uma função de y.

3.6 Distribuições condicionais
Distribuições condicionais discretas

- Exemplo 3.6.2:

Calculating a Conditional p.f. from a Joint p.f. Suppose that the joint p.f. of X and Y is as specified in Table 3.4 in Example 3.5.2. We shall determine the conditional p.f. of Y given that $X = 2$.

The marginal p.f. of X appears in the Total column of Table 3.4, so $f_1(2) = \Pr(X = 2) = 0.6$. Therefore, the conditional probability $g_2(y|2)$ that Y will take a particular value y is

$$g_2(y|2) = \frac{f(2, y)}{0.6}.$$

It should be noted that for all possible values of y, the conditional probabilities $g_2(y|2)$ must be proportional to the joint probabilities $f(2, y)$. In this example, each value of $f(2, y)$ is simply divided by the constant $f_1(2) = 0.6$ in order that the sum of the results will be equal to 1. Thus,

$$g_2(1|2) = 1/2, \quad g_2(2|2) = 0, \quad g_2(3|2) = 1/6, \quad g_2(4|2) = 1/3. \quad \blacktriangleleft$$

3.6 Distribuições condicionais
Distribuições condicionais discretas

- Exemplo 3.6.3:

Auto Insurance. Consider again the probabilities of car brands and cars being stolen in Example 3.6.1. The conditional distribution of X (being stolen) given Y (brand) is given in Table 3.8. It appears that Brand 1 is much more likely to be stolen than other cars in this area, with Brand 1 also having a significant chance of being stolen. ◀

Table 3.8 Conditional p.f. of X given Y for Example 3.6.3

	Brand Y				
Stolen X	1	2	3	4	5
0	0.928	0.968	0.994	0.993	0.991
1	0.072	0.032	0.006	0.007	0.009

3.6 Distribuições condicionais
Distribuições condicionais contínuas

- Exemplo 3.6.4:

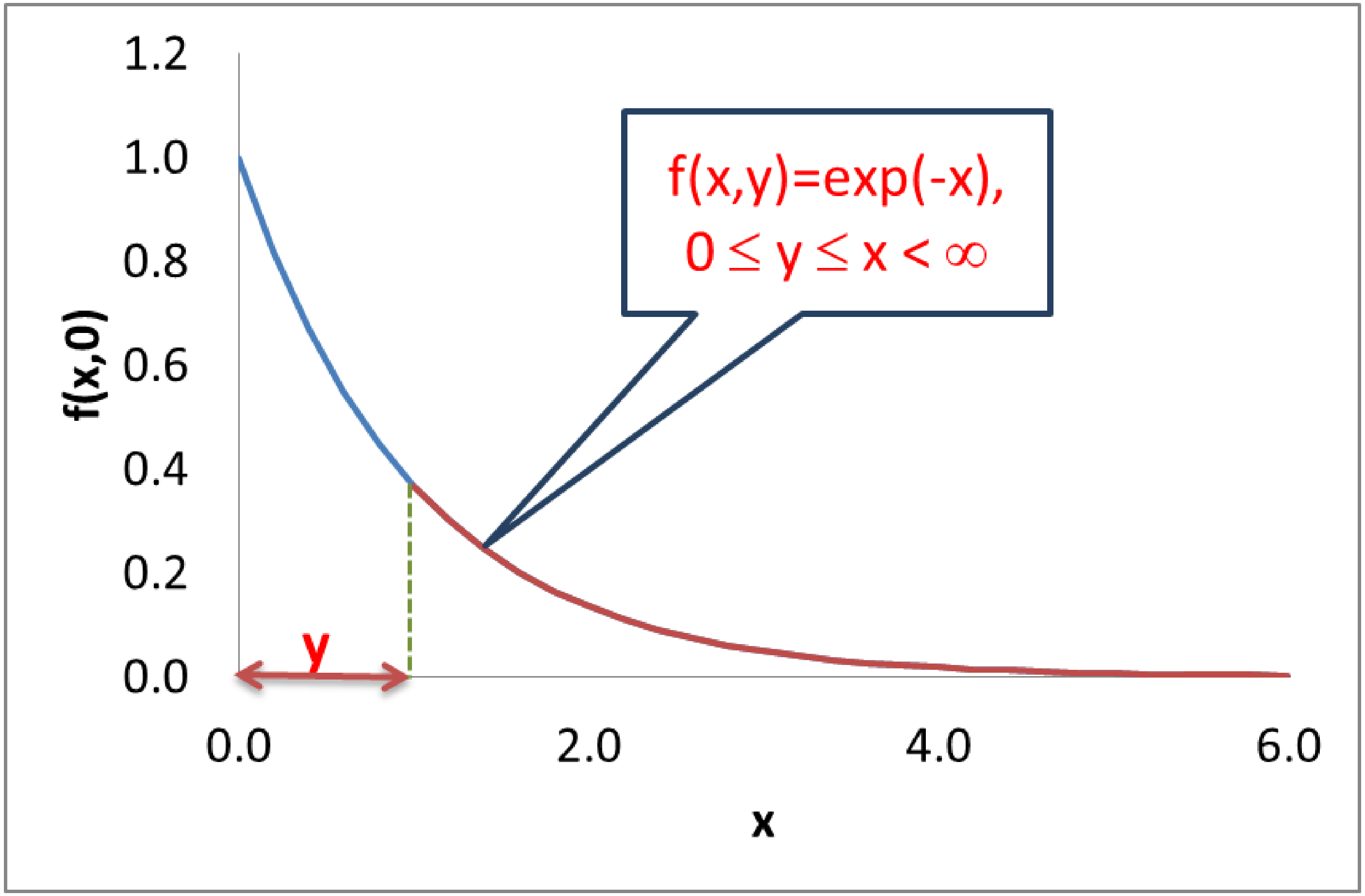
Processing Times. A manufacturing process consists of two stages. The first stage takes Y minutes, and the whole process takes X minutes (which includes the first Y minutes). Suppose that X and Y have a joint continuous distribution with joint p.d.f.

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } 0 \le y \le x < \infty, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

After we learn how much time Y that the first stage takes, we want to update our distribution for the total time X. In other words, we would like to be able to compute a conditional distribution for X given $Y = y$. We cannot argue the same way as we did with discrete joint distributions, because $\{Y = y\}$ is an event with probability 0 for all y. ◀

3.6 Distribuições condicionais
Distribuições condicionais contínuas

- Exemplo 3.6.4 (cont):



3.6 Distribuições condicionais
Distribuições condicionais contínuas

- O conceito de probabilidade condicional pode ser estendido para distribuições contínuas, usando a analogia entre uma f.p. (caso discreto) e uma f.d.p. (caso contínuo).

3.6 Distribuições condicionais
Distribuições condicionais contínuas

- **Definição 3.6.2: f.d.p. condicional**
  Sejam *X* e *Y* variáveis aleatórias com uma distribuição conjunta contínua, f.d.p. conjunta *f* e respectivas marginais f_1 e f_2. Seja *y* um valor de *Y* tal que $f_2(y) > 0$. Então a a *f.d.p. condicional de X dado* $Y = y$, g_1, é definida como segue:

$$g_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} \quad \text{for } -\infty < x < \infty. \tag{3.6.4}$$

  (Para valores de y tais que $f_2(y) = 0$ pode-se definir $g_1(x|y)$ como quisermos, contanto que $g_1(x|y)$ seja uma f.d.p. como função de *x*.)

3.6 Distribuições condicionais
Distribuições condicionais contínuas

- **Teorema 3.6.1:** Para cada y, $g_1(x|y)$ apresentada na Definição 3.6.2 é uma f.d.p. como função de x.
  - Dem: se $f_2(y) = 0$, então $g_1(x|y)$ pode se qualquer f.d.p. , e o resultado vale.
    Se $f_2(y) > 0$, g_1 é definida pela Eq. (3.6.4). Para cada tal *y*, é claro que $g_1(x|y) \geq 0$ para todo *x*. Também, se $f_2(y) > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x|y)\,dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx}{f_2(y)} = \frac{f_2(y)}{f_2(y)} = 1,$$

usando a Eq. (3.5.3):

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx \quad \text{for } -\infty < y < \infty. \tag{3.5.3}$$

3.6 Distribuições condicionais
Distribuições condicionais contínuas

- Exemplo 3.6.5:

Processing Times. In Example 3.6.4, Y is the time that the first stage of a process takes, while X is the total time of the two stages. We want to calculate the conditional p.d.f. of X given Y. We can calculate the marginal p.d.f. of Y as follows: For each y, the possible values of X are all $x \geq y$, so for each $y > 0$,

$$f_2(y) = \int_y^\infty e^{-x} dx = e^{-y},$$

and $f_2(y) = 0$ for $y < 0$. For each $y \geq 0$, the conditional p.d.f. of X given $Y = y$ is then

$$g_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{e^{-x}}{e^{-y}} = e^{y-x}, \text{ for } x \geq y,$$

and $g_1(x|y) = 0$ for $x < y$. So, for example, if we observe $Y = 4$ and we want the conditional probability that $X \geq 9$, we compute

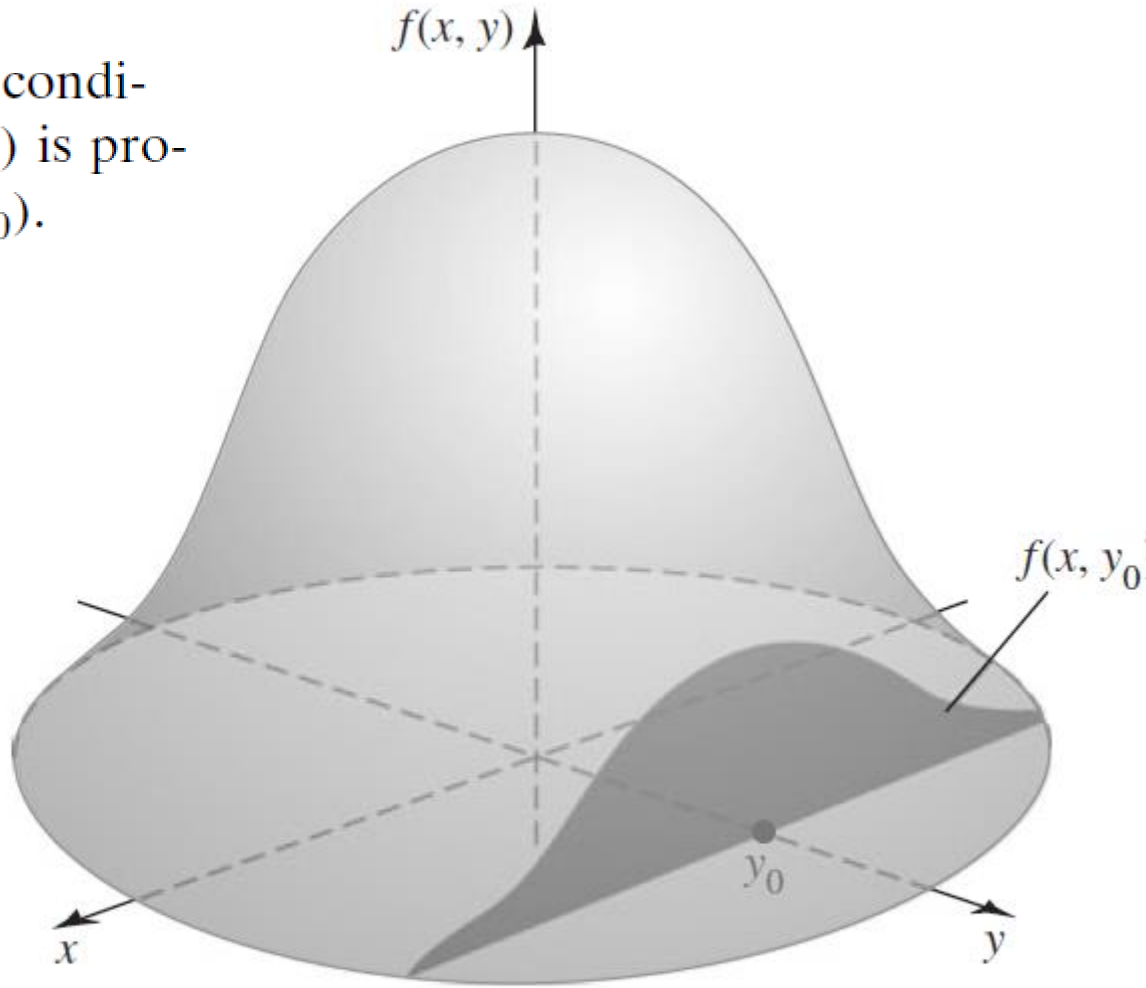
$$\Pr(X \geq 9|Y = 4) = \int_9^\infty e^{4-x} dx = e^{-5} = 0.0067. \quad ◀$$

3.6 Distribuições condicionais
Distribuições condicionais contínuas

- A Definição 3.6.2 possui uma interpretação que pode ser compreendida considerando a Fig. 3.20 (próximo slide).
  - A f.d.p. conjunta define uma superfície sobre o plano *xy* para o qual a altura $f(x, y)$ em cada ponto (x, y) representa a verossimilhança relativa daquele ponto.
  - Por exemplo, se é sabido que $Y = y_0$, então o ponto (x, y) deve estar na linha $y = y_0$ no plano *xy*, e a verossimilhança relativa de qualquer ponto (x, y_0) nesta linha é $f(x, y_0)$.
  - Logo, a f.d.p. condicional $g_1(x|y_0)$ de *X* deveria ser proporcional a $f(x, y_0)$.
  - Em outras palavras, $g_1(x|y_0)$ é essencialmente a mesma que $f(x, y_0)$, apenas incluindo um fator constante $1/[f_2(y_0)]$, que é necessário para fazer a f.d.p. condicional integrar em 1 sobre todos os valores de *x*.

3.6 Distribuições condicionais
Distribuições condicionais contínuas

Figure 3.20 The conditional p.d.f. $g_1(x|y_0)$ is proportional to $f(x, y_0)$.



3.6 Distribuições condicionais
Distribuições condicionais contínuas

- Definição análoga de $g_1(x|y)$ se aplica a $g_2(y|x)$:
  Para cada valor de *x* tal que $f_1(x) > 0$, a f.d.p. condicional de Y dado que $X = x$ é definida como:
  $$g_2(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \quad \text{for } -\infty < y < \infty. \tag{3.6.5}$$

- Para distribuições mistas, usamos as Eqs (3.6.2) e (3.6.3) para definir f.p's e f.d.p's condicionais.

- **Definição 3.6.3: f.p. ou f.d.p. condicional de distribuições mistas**
  Seja *X* discreta e *Y* contínua com f.p./f.d.p. conjunta f. Então a f.p. condicional de *X* dado $Y = y$ é definida pela Eq. (3.6.2), e a f.d.p. condicional de *Y* dado $X = x$ é definida pela Eq. (3.6.3).

3.6 Distribuições condicionais
Construção da distribuição conjunta

- Exemplo 3.6.7:

Defective Parts. Suppose that a certain machine produces defective and nondefective parts, but we do not know what proportion of defectives we would find among all parts that could be produced by this machine. Let P stand for the unknown proportion of defective parts among all possible parts produced by the machine. If we were to learn that $P = p$, we might be willing to say that the parts were independent of each other and each had probability p of being defective. In other words, if we condition on $P = p$, then we have the situation described in Example 3.1.9. As in that example, suppose that we examine n parts and let X stand for the number of defectives among the n examined parts. The distribution of X, assuming that we know $P = p$, is the binomial distribution with parameters n and p. That is, we can let the binomial p.f. (3.1.4) be the conditional p.f. of X given $P = p$, namely,

$$g_1(x|p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \text{ for } x = 0, \ldots, n.$$

3.6 Distribuições condicionais
Construção da distribuição conjunta

- Exemplo 3.6.7 (cont):

We might also believe that P has a continuous distribution with p.d.f. such as $f_2(p) = 1$ for $0 \le p \le 1$. (This means that P has the uniform distribution on the interval $[0, 1]$.) We know that the conditional p.f. g_1 of X given $P = p$ satisfies

$$g_1(x|p) = \frac{f(x, p)}{f_2(p)},$$

where f is the joint p.f./p.d.f. of X and P. If we multiply both sides of this equation by $f_2(p)$, it follows that the joint p.f./p.d.f. of X and P is

$$f(x, p) = g_1(x|p) f_2(p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad \text{for } x = 0, \ldots, n, \text{ and } 0 \le p \le 1.$$

◀

3.6 Distribuições condicionais
Construção da distribuição conjunta

- Generalização da regra de multiplicação para probabilidades condicionais:
  - Um caso especial do Teorema 2.1.2, a regra de multiplicação para probabilidades condicionais, afirma que se A e B são eventos, então $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B|A)$.
  - O seguinte teorema, cuja prova é imediata das Eqs. (3.6.4) e (3.6.5), generaliza o Teorema 2.1.2 para o caso de duas variáveis aleatórias.
  - Relembrando Eqs. (3.6.4) e (3.6.5):

$$g_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} \quad \text{for } -\infty < x < \infty. \tag{3.6.4}$$

$$g_2(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \quad \text{for } -\infty < y < \infty. \tag{3.6.5}$$

3.6 Distribuições condicionais
Construção da distribuição conjunta

- **Teorema 3.6.2: Regra da multiplicação para distribuições.** Sejam X e Y variáveis aleatórias tais que *X* tem f.p. ou f.d.p. $f_1(x)$ e *Y* tem f.p. ou f.d.p. $f_2(y)$.
  Assuma também que a f.p. ou f.d.p. condicional de *X* dado $Y = y$ seja $g_1(x|y)$ e a f.p. ou f.d.p. condicional de *Y* dado $X = x$ seja $g_2(y|x)$.
  Então para todo *y* tal que $f_2(y) > 0$ e todo *x*,

$$f(x, y) = g_1(x|y) f_2(y), \tag{3.6.7}$$

  onde f é a f.p. ou f.d.p. conjunta de *X* e *Y*.
  Analogamente, para todo *x* tal que $f_1(x) > 0$ e todo *y*,

$$f(x, y) = f_1(x) g_2(y|x). \tag{3.6.8}$$

3.6 Distribuições condicionais
Construção da distribuição conjunta

- Exemplo 3.6.9:

Defective Parts. Let X be the number of defective parts in a sample of size n, and let P be the proportion of defectives among all parts, as in Example 3.6.7. The joint p.f./p.d.f of X and $P = p$ was calculated there as

$$f(x, p) = g_1(x|p) f_2(p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad \text{for } x = 0, \ldots, n \text{ and } 0 \le p \le 1.$$

We could now compute the conditional p.d.f. of P given $X = x$ by first finding the marginal p.f. of X:

$$f_1(x) = \int_0^1 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} dp, \tag{3.6.9}$$

The conditional p.d.f. of P given $X = x$ is then

$$g_2(p|x) = \frac{f(x, p)}{f_1(x)} = \frac{p^x (1-p)^{n-x}}{\int_0^1 q^x (1-q)^{n-x} dq}, \quad \text{for } 0 < p < 1. \tag{3.6.10}$$

3.6 Distribuições condicionais
Construção da distribuição conjunta

- Exemplo 3.6.9 (cont):

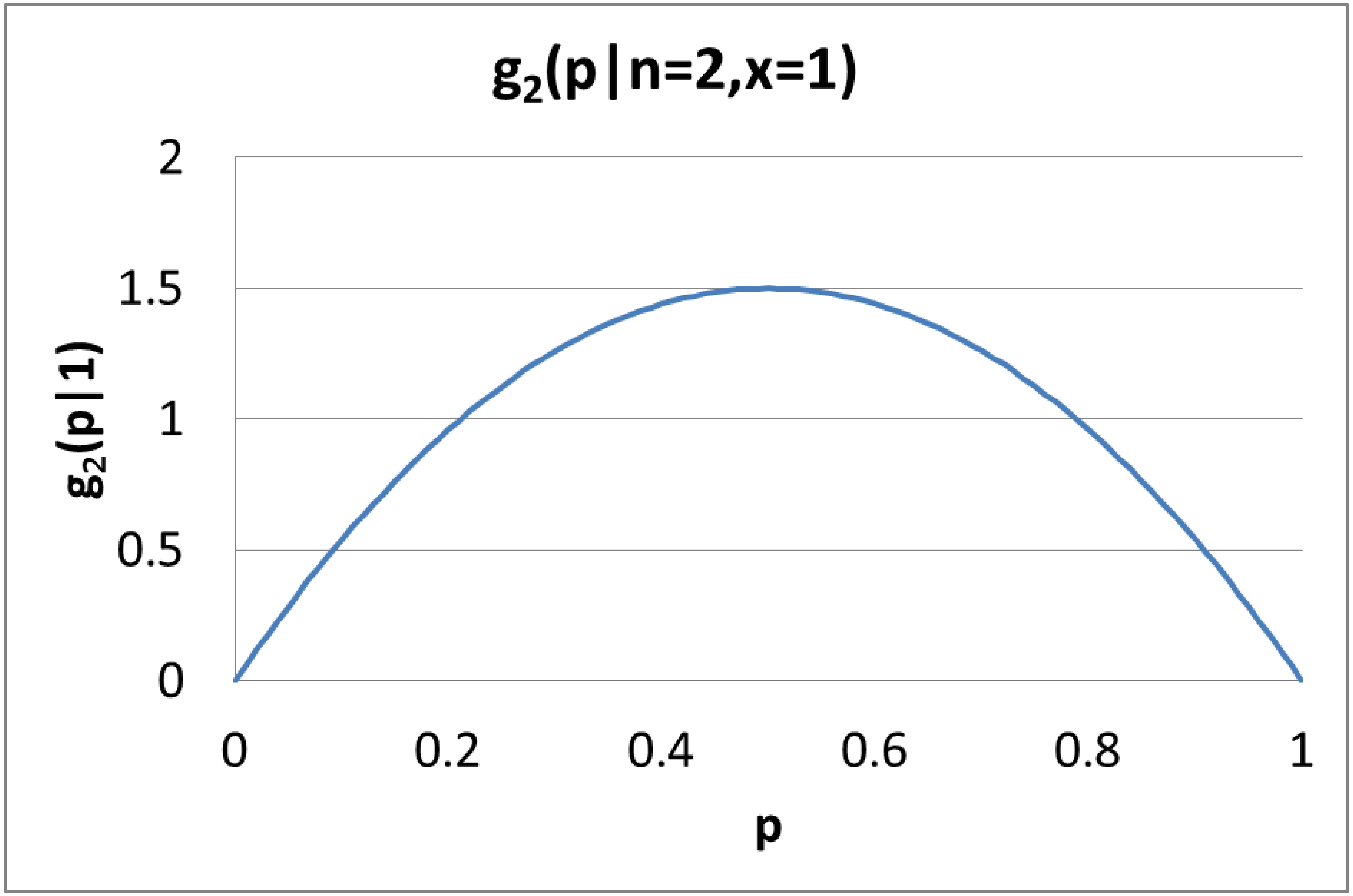
The integral in the denominator of Eq. (3.6.10) can be tedious to calculate, but it can be found. For example, if $n = 2$ and $x = 1$, we get

$$\int_0^1 q(1-q)dq = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

In this case, $g_2(p|1) = 6p(1-p)$ for $0 \leq p \leq 1$. ◀

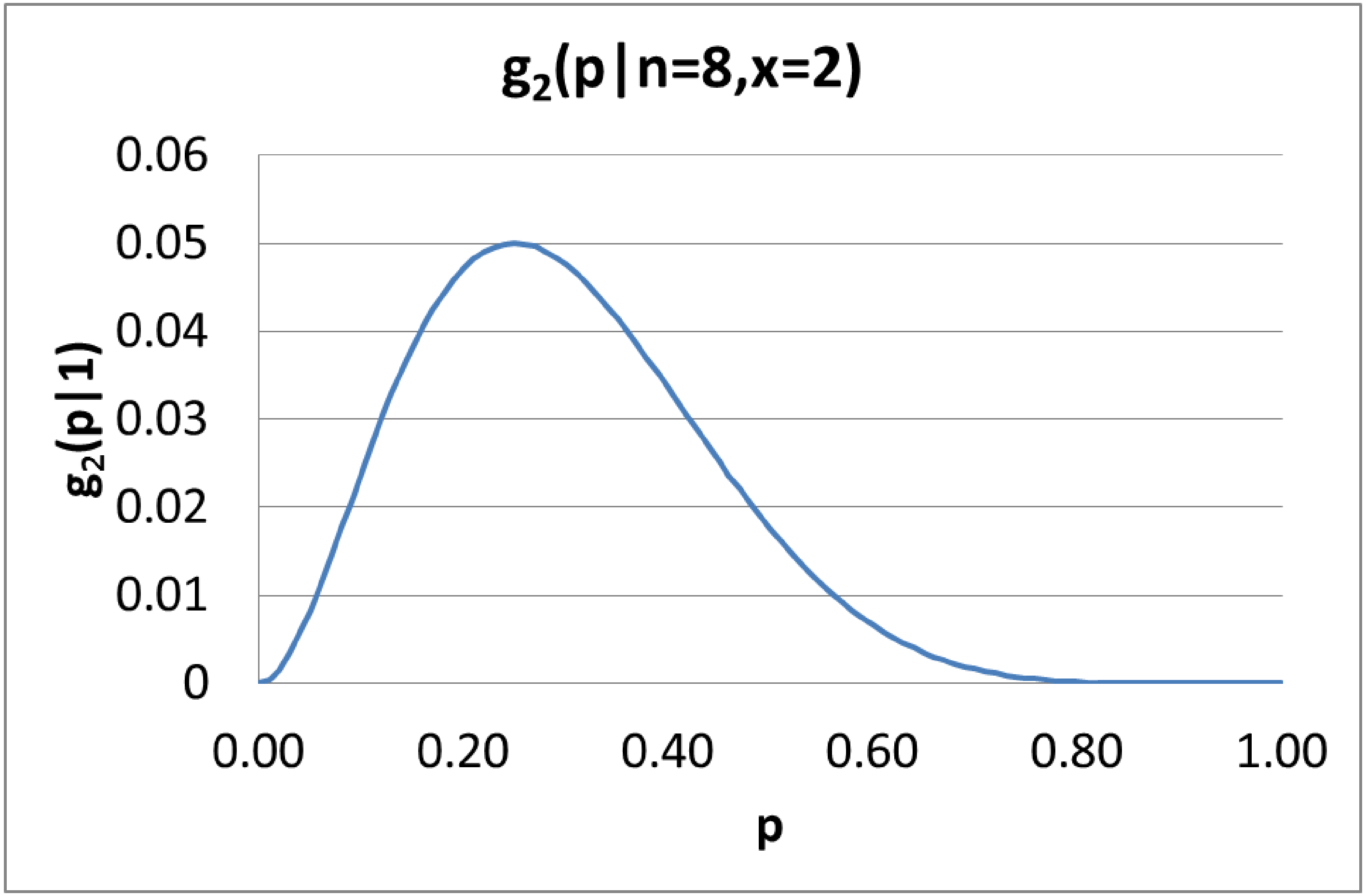
3.6 Distribuições condicionais
Construção da distribuição conjunta

- Exemplo 3.6.9 (cont):



3.6 Distribuições condicionais
Construção da distribuição conjunta

- Exemplo 3.6.9 (extensão):
  Para n=8, x=2? $g_2(p|x) = 9p^2(1-p)^6/2$



3.6 Distribuições condicionais
Construção da distribuição conjunta

- Teorema de Bayes e a lei da probabilidade total para variáveis aleatórias:
  - A Eq. (3.6.9) é um exemplo da generalização da lei da probabilidade total para variáveis aleatórias.
  - Adicionalmente, a Eq. (3.6.10) é um exemplo da generalização do teorema de Bayes para variáveis aleatórias.
  - Os teoremas a seguir formalizam esse resultado.

3.6 Distribuições condicionais
Construção da distribuição conjunta

- **Teorema 3.5.3: Lei da probabilidade total para variáveis aleatórias**
  Se $f_2(y)$ é a f.p. ou f.d.p. de uma variável aleatória *Y* e $g_1(x|y)$ é a f.p. ou f.d.p. condicional de X dado $Y = y$, então a f.p. ou f.d.p. marginal de *X* é

$$f_1(x) = \sum_y g_1(x|y) f_2(y), \qquad (3.6.11)$$

  se Y for discreta. Se Y for contínua, a f.p. ou f.d.p. de X é

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x|y) f_2(y)\, dy. \qquad (3.6.12)$$

3.6 Distribuições condicionais
Construção da distribuição conjunta

- **Teorema 3.5.4: Teorema de Bayes para variáveis aleatórias**
  Se $f_2(y)$ é a f.p. ou f.d.p. de uma variável aleatória *Y* e $g_1(x|y)$ é a f.p. ou f.d.p. condicional de X dado $Y = y$.
  Então a f.p. ou f.d.p. condicional de *Y* dado $X = x$ é
  $$g_2(y|x) = \frac{g_1(x|y) f_2(y)}{f_1(x)}, \qquad (3.6.13)$$
  onde $f_1(x)$ é obtida das Eqs. (3.6.11) ou (3.6.12).
  Analogamente, a f.p. ou f.d.p. de X dado $Y = y$ é
  $$g_1(x|y) = \frac{g_2(y|x) f_1(x)}{f_2(y)}, \qquad (3.6.14)$$
  onde $f_2(y)$ é obtido das Eqs. (3.6.11) ou (3.6.12) com x e y invertidos e os subscritos 1 e 2 invertidos.

3.6 Distribuições condicionais
Construção da distribuição conjunta

- **Teorema 3.5.5: Variáveis aleatórias independentes**
  Suponha que X e Y são duas variáveis aleatórias com uma f.p. ou f.d.p. f. Então X e Y são independentes se e somente se para todo valor de y tal que $f_2(y) > 0$ e todo valor de x,

$$g_1(x|y) = f_1(x). \tag{3.6.17}$$

Proof Theorem 3.5.4 says that X and Y are independent if and only if $f(x, y)$ can be factored in the following form for $-\infty < x < \infty$ and $-\infty < y < \infty$:

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y),$$

which holds if and only if, for all x and all y such that $f_2(y) > 0$,

$$f_1(x) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}. \tag{3.6.18}$$

But the right side of Eq. (3.6.18) is the formula for $g_1(x|y)$. Hence, X and Y are independent if and only if Eq. (3.6.17) holds for all x and all y such that $f_2(y) > 0$. ∎

3.8 Funções de uma variável aleatória

- São comuns situações em que, o que se deseja, não é simplesmente calcular a distribuição de uma variável aleatória X, mas sim a distribuição de alguma função de X.
- Por exemplo, se X é a taxa pela qual clientes são atendidos em uma fila, então $1/X$ é o tempo médio de espera.
- Se temos a distribuição de X, deveríamos ser capazes de determinar a distribuição de $1/X$ ou de qualquer outra função de X.
- Veremos nessa seção como fazer isto.

3.8 Funções de uma variável aleatória
Variável aleatória com distribuição discreta

- Exemplo 3.8.1:

Distance from the Middle. Let X have the uniform distribution on the integers $1, 2, \ldots, 9$. Suppose that we are interested in how far X is from the middle of the distribution, namely, 5. We could define $Y = |X - 5|$ and compute probabilities such as $\Pr(Y = 1) = \Pr(X \in \{4, 6\}) = 2/9$. ◄

- O exemplo acima ilustra o procedimento geral para encontrar a distribuição de uma função de uma variável aleatória discreta, indicado pelo teorema a seguir.

3.8 Funções de uma variável aleatória
Variável aleatória com distribuição discreta

- **Teorema 3.8.1: Função de uma variável aleatória discreta**
  Seja *X* uma variável aleatória discreta com f.p. *f*, e seja $Y = r(X)$ para alguma função r definida no conjunto de todos os possíveis valores de *X*. Para cada possível valor *y* de *Y*, a f.p. *g* de *Y* é

$$g(y) = \Pr(Y = y) = \Pr[r(X) = y] = \sum_{x:\, r(x)=y} f(x).$$

- Exemplo 3.8.2:

Distance from the Middle. The possible values of Y in Example 3.8.1 are 0, 1, 2, 3, and 4. We see that $Y = 0$ if and only if $X = 5$, so $g(0) = f(5) = 1/9$. For all other values of Y, there are two values of X that give that value of Y. For example, $\{Y = 4\} = \{X = 1\} \cup \{X = 9\}$. So, $g(y) = 2/9$ for $y = 1, 2, 3, 4$. ◄

3.8 Funções de uma variável aleatória
Variável aleatória com distribuição contínua

- Se uma variável aleatória *X* tem distribuição contínua, nem sempre é possível derivar diretamente a função de densidade de probabilidade de Y, como ocorre com variáveis discretas.
  - Não basta trocar o somatório por integral, pois o conjunto $\{x: r(x) = y\}$ pode ter integral nula.

- Uma forma de proceder é calcular a f.d.a. de *Y* a partir da f.d.p. ou da f.d.a. de *X*, como apresentado no exemplo abaixo.

3.8 Funções de uma variável aleatória
Variável aleatória com distribuição contínua

- Exemplo 3.8.3:

Average Waiting Time. Let Z be the rate at which customers are served in a queue, and suppose that Z has a continuous c.d.f. F. The average waiting time is $Y = 1/Z$. If we want to find the c.d.f. G of Y, we can write

$$G(y) = \Pr(Y \le y) = \Pr\left(\frac{1}{Z} \le y\right) = \underline{\Pr\left(Z \ge \frac{1}{y}\right) = \Pr\left(Z > \frac{1}{y}\right)} = 1 - F\left(\frac{1}{y}\right),$$

where the fourth equality follows from the fact that Z has a continuous distribution so that $\Pr(Z = 1/y) = 0$. ◀

3.8 Funções de uma variável aleatória
Variável aleatória com distribuição contínua

- No caso geral, suponha que a f.d.p. de *X* seja *f* e que outra variável aleatória seja definida como $Y = r(X)$. Para cada número real *y*, a f.d.a. $G(y)$ de *Y* pode ser derivada como segue:

$$G(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr[r(X) \leq y]$$
$$= \int_{\{x:r(x)\leq y\}} f(x)\,dx.$$

- Se a variável aleatória Y também possui uma distribuição contínua, sua f.d.p. *g* pode ser obtida da relação

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy}.$$

Esta relação é satisfeita em qualquer ponto *y* no qual *G* é diferenciável.

3.8 Funções de uma variável aleatória
Variável aleatória com distribuição contínua

- Exemplo 3.8.4:

Deriving the p.d.f. of X^2 when X Has a Uniform Distribution. Suppose that X has the uniform distribution on the interval $[-1, 1]$, so

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{for } -1 \le x \le 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We shall determine the p.d.f. of the random variable $Y = X^2$.

Since $Y = X^2$, then Y must belong to the interval $0 \le Y \le 1$. Thus, for each value of Y such that $0 \le y \le 1$, the c.d.f. $G(y)$ of Y is

$$\begin{aligned} G(y) &= \Pr(Y \le y) = \Pr(X^2 \le y) \\ &= \Pr(-y^{1/2} \le X \le y^{1/2}) \\ &= \int_{-y^{1/2}}^{y^{1/2}} f(x)\, dx = y^{1/2}. \end{aligned}$$

For $0 < y < 1$, it follows that the p.d.f. $g(y)$ of Y is

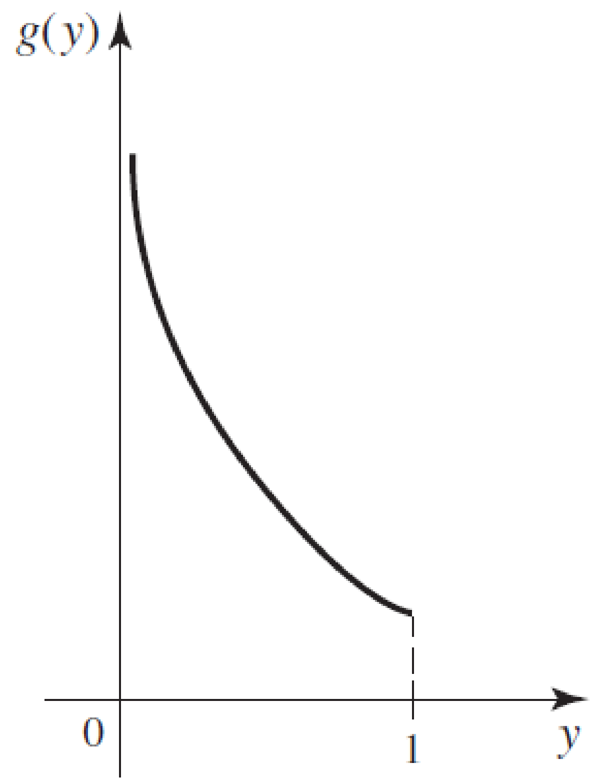
$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \frac{1}{2y^{1/2}}.$$

3.8 Funções de uma variável aleatória
Variável aleatória com distribuição contínua

- Exemplo 3.8.4 (cont):

This p.d.f. of Y is sketched in Fig. 3.23. It should be noted that although Y is simply the square of a random variable with a uniform distribution, the p.d.f. of Y is unbounded in the neighborhood of $y = 0$. ◀

Figure 3.23 The p.d.f. of $Y = X^2$ in Example 3.8.4.



3.8 Funções de uma variável aleatória
Transformação integral de probabilidade

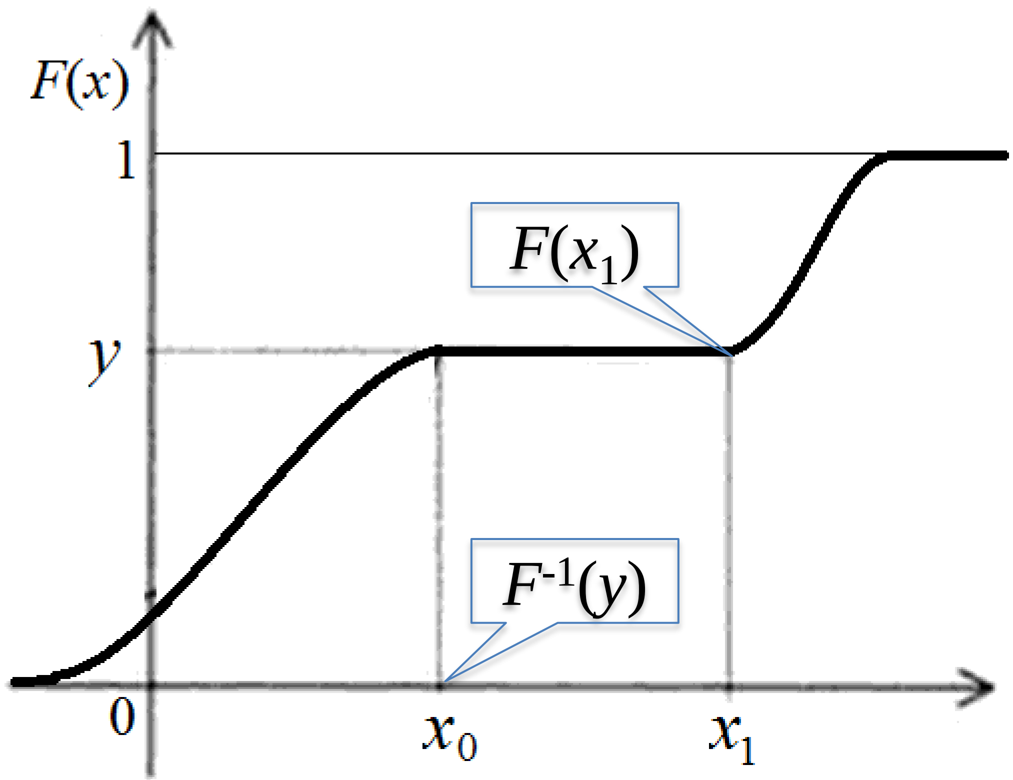
- Em análise estatística, métodos computacionais de simulação têm sido cada vez mais utilizados
  - Uma das peças chave em simulações é poder gerar uma variável aleatória com certa distribuição de probabilidade.
    Exemplos:
    - Lançamento de uma moeda ou de um dado (não necessariamente honestos)
    - Taxa de peças defeituosas produzidas por uma máquina (ver Ex. 3.6.9)
    - Taxa de ocorrência de sinistros em uma carteira de seguros
    - Tempo de vida de um organismo, componente ou equipamento
    - Concentração de microrganismos em um meio
  - Vários métodos de simulação de variáveis aleatórias se baseiam em uma transformação especial, definida a seguir.

3.8 Funções de uma variável aleatória
Transformação integral de probabilidade

- **Teorema 3.8.3: Transformação integral de probabilidade**
  Seja *X* uma variável aleatória contínua com f.d.a. *F*, e seja *Y* a transformação de *X* tal que $Y = F(X)$. (Esta transformação de X em Y é denominada *transformação integral de probabilidade*). A distribuição de Y é a distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$.
  - Dem: Como *F* é uma f.d.a., segue que $0 \leq F(x) \leq 1$ para $-\infty < x < \infty$. Logo, $\Pr(Y < 0) = \Pr(Y > 1) = 0$. Como *F* é contínua, o conjunto de *x* tal que $F(x) = y$ é um intervalo não vazio e fechado $[x_0, x_1]$ para cada y no intervalo $(0,1)$. Dessa forma, $Y \leq y$ sse $X \leq x_1$. Seja *G* a f.d.a. de *Y*. Então,
    $$G(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(X \leq x_1) = F(x_1) = y.$$
    Logo, $G(y) = y$ para $0 < y < 1$, o que corresponde justamente à f.d.a. da distribuição uniforme no intervalo [0,1].
    Portanto, Y tem distribuição uniforme no intervalo [0,1].

3.8 Funções de uma variável aleatória
Transformação integral de probabilidade

- Na demonstração do Teorema anterior, denotemos por $F^{-1}(y)$ o limite inferior x_0 do intervalo $[x_0, x_1]$ tal que $F(x) = y$; x_0 é denominado o quantil *y* de *F* pela Definição 3.3.2.



3.8 Funções de uma variável aleatória
Transformação integral de probabilidade

- Como $\Pr\big(X = F^{-1}(Y)\big) = 1$ na prova do Teorema 3.8.3, temos o seguinte corolário:

- **Corolário 3.8.1:**
  Seja *U* uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo [0,1], e seja *F* uma f.d.a. contínua com função quantil F^{-1}. Então $X = F^{-1}(U)$ tem f.d.a. *F*.

3.8 Funções de uma variável aleatória
Transformação integral de probabilidade

- *Método da Transformação Inversa:*
  - O corolário 3.8.1 fornece um método de simulação de variáveis aleatórias contínuas, usando a transformação inversa.
  - Para gerar uma variável aleatória X com f.d.a. contínua F:
    1. Gere uma variável aleatória *U* com distribuição uniforme no intervalo [0,1];
    2. Use a transformação $X = F^{-1}(U)$;

3.8 Funções de uma variável aleatória
Transformação integral de probabilidade

- Método análogo ao da transformação inversa para variáveis aleatórias discretas:
  - Usando a definição de função quantil (também chamada inversa generalizada), podemos também gerar variáveis aleatórias discretas.
  - Para gerar uma variável aleatória discreta *X* com f.p. $\Pr(X = x_j) = p_j, j = 0,1, \dots, \sum_j p_j = 1$, podemos utilizar o seguinte procedimento análogo ao método da transformação inversa:
    1. Gere uma variável aleatória *U* com distribuição uniforme no intervalo [0,1];
    2. Use a transformação abaixo para *X*:

$$X = \begin{cases} x_1 \text{se } U \leq p_1 \\ x_2 \text{ se } p_1 < U \leq p_1 + p_2 \\ \vdots \\ x_j \text{ se } \sum_{i=1}^{j-1} p_i < U \leq \sum_{i=1}^{j} p_i \\ \vdots \end{cases}$$

3.8 Funções de uma variável aleatória
Transformação integral de probabilidade

- Exemplos em R de simulação de variáveis aleatórias pelo método da transformação inversa:

  - Página html:
    www.each.usp.br/lauretto/ACH2053_2018/exemplo_metodo_transf_inv.html

  - Código-fonte:
    www.each.usp.br/lauretto/ACH2053_2018/exemplos_metodo_transf_inv.r