

Introdução à Estatística

W.O.Bussab, P.A.Morettin. Estatística Básica, 6ª Edição.

São Paulo: Saraiva, 2010 – Capítulo 10

Exercícios Recomendados

3. A distribuição do número de filhos, por família, de uma zona rural está no quadro abaixo.

Nº de filhos	Porcentagem
0	10
1	20
2	30
3	25
4	15
Total	100

- (a) Sugira um procedimento para sortear uma observação ao acaso dessa população.
- (b) Dê, na forma de uma tabela de dupla entrada, as possíveis amostras do número de filhos de duas famílias que podem ser sorteadas e as respectivas probabilidades de ocorrência.
- (c) Se fosse escolhida uma amostra de tamanho 4, qual seria a probabilidade de se observar a quádrupla ordenada (2, 3, 3, 1)?
- (d) Responder ao item (b) por meio de simulação (gerando 10.000 pares de famílias e calculando suas probabilidades através das respectivas frequências); comparar os resultados com os do item (b)

4. Usando os dados da Tabela 10.2, construa a distribuição amostral da estatística

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n}.$$

Tabela 10.2: Distribuição das probabilidades das possíveis amostras de tamanho 2 que podem ser selecionadas com reposição da população {1, 3, 5, 5, 7}.

$X_2 \backslash X_1$	1	3	5	7	Total
1	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
3	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
5	2/25	2/25	4/25	2/25	2/5
7	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
Total	1/5	1/5	2/5	1/5	1

5. No Problema 3, se X indicar o número de filhos na população, X_1 o número de filhos observados na primeira extração e X_2 na segunda:
- calcule a média e a variância de X ;
 - calcule $E(X)$ e $\text{Var}(X)$, $i = 1, 2$;
 - construa a distribuição amostral de $\bar{X} = \frac{(X_1 + X_2)}{2}$;
 - calcule $E(\bar{X})$ e $\text{Var}(\bar{X})$;
 - faça num mesmo gráfico os histogramas de X e de \bar{X} ;
 - construa as distribuições amostrais de $S^2 = \sum_{i=1}^2 (X_i - \bar{X})^2$ e $\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^2 (X_i - \bar{X})^2/2$;
 - baseado no resultado de (f), qual dos dois estimadores você usaria para estimar a variância de X ? Por quê?
 - calcule $P(|\bar{X} - \mu| > 1)$.
6. Ainda com os dados do Problema 3, e para amostras de tamanho 3:
- determine a distribuição amostral de \bar{X} e faça o histograma;
 - calcule a média e variância de \bar{X} ;
 - calcule $P(|\bar{X} - \mu| > 1)$.
 - se as amostras fossem de tamanho 4, a $P(|\bar{X} - \mu| > 1)$ seria maior ou menor do que a probabilidade encontrada em (c)? Por quê?
7. Uma v.a. X tem distribuição normal, com média 100 e desvio padrão 10.
- Qual a $P(90 < X < 110)$?
 - Se \bar{X} for a média de uma amostra de 16 elementos retirados dessa população, calcule $P(90 < \bar{X} < 110)$.
 - Represente, num único gráfico, as distribuições de X e \bar{X} .
 - Que tamanho deveria ter a amostra para que $P(90 < \bar{X} < 110) = 0,95$?
8. A máquina de empacotar um determinado produto o faz segundo uma distribuição normal, com média μ e desvio padrão 10 g.
- Em quanto deve ser regulado o peso médio μ para que apenas 10% dos pacotes tenham menos do que 500 g?
 - Com a máquina assim regulada, qual a probabilidade de que o peso total de 4 pacotes escolhidos ao acaso seja inferior a 2 kg?

Dicas: Para o item 8(a), calcule $F^{-1}(0.1 | \mu, \sigma = 10)$, para valores de $\mu = 500, 501, 502, \dots$ onde F^{-1} denota a função quantil (inversa) da distribuição normal; escolha o menor valor de μ para o qual $F^{-1}(0.1 | \mu, \sigma = 10) \geq 500$; para o item 8(b), note que

$$\Pr(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 < 2000) = \Pr(\bar{X} < 500)$$

9. No exemplo anterior, e após a máquina estar regulada, programou-se uma carta de controle de qualidade. De hora em hora, será retirada uma amostra de quatro pacotes e esses serão pesados. Se a média da amostra for inferior a 495 g ou superior a 520 g, encerra-se a produção para reajustar a máquina, isto é, reajustar o peso médio.
- (a) Qual é a probabilidade de ser feita uma parada desnecessária?
- (b) Se o peso médio da máquina desregulou-se para 500 g, qual é a probabilidade de continuar a produção fora dos padrões desejados?
10. A capacidade máxima de um elevador é de 500 kg. Se a distribuição X dos pesos dos usuários for suposta $N(70, 100)$:
- (a) Qual é a probabilidade de sete passageiros ultrapassarem esse limite?
- (b) E seis passageiros?

Problemas

11. Sabe-se que 20% das peças de um lote são defeituosas. Sorteiam-se oito peças, com reposição, e calcula-se a proporção \hat{p} de peças defeituosas na amostra.
- (a) Construa a distribuição exata de \hat{p} (use o R ou o Excel para construir essa distribuição)
- (b) Construa a aproximação normal à binomial.
- (c) Você pensa que a segunda distribuição é uma boa aproximação da primeira?
- (d) Já sabemos que, para dado p fixo, a aproximação melhora à medida que n aumenta. Agora, se n for fixo, para qual valor de p a aproximação é melhor?
12. Um procedimento de controle de qualidade foi planejado para garantir um máximo de 10% de itens defeituosos na produção. A cada 6 horas sorteia-se uma amostra de 20 peças e, havendo mais de 15% de defeituosas, encerra-se a produção para verificação do processo. Qual a probabilidade de uma parada desnecessária?
13. Supondo que a produção do exemplo anterior esteja sob controle, isto é, $p = 10\%$, e que os itens sejam vendidos em caixas com 100 unidades, qual a probabilidade de que uma caixa:
- (a) tenha mais do que 10% de defeituosos?
- (b) não tenha itens defeituosos?

Problemas

17. Suponha que uma indústria farmacêutica deseja saber a quantos voluntários se deva aplicar uma vacina, de modo que a proporção de indivíduos imunizados na amostra difira de menos de 2% da proporção verdadeira de imunizados na população, com probabilidade 90%. Qual o tamanho da amostra a escolher? Use (10.8).
18. No problema anterior, suponha que a indústria tenha a informação de que a proporção de imunizados pela vacina seja $p \geq 0,80$. Qual o novo tamanho de amostra a escolher? Houve redução?

Dica: Para a questão 17, como não há informação sobre a proporção de imunizados pela vacina (p), assumo $p=0.50$

24. A distribuição dos comprimentos dos elos da corrente de bicicleta é normal, com média 2 cm e variância $0,01 \text{ cm}^2$. Para que uma corrente se ajuste à bicicleta, deve ter comprimento total entre 58 e 61 cm.
- (a) Qual é a probabilidade de uma corrente com 30 elos não se ajustar à bicicleta?
- (b) E para uma corrente com 29 elos?
- [Observação: suponha que os elos sejam selecionados ao acaso para compor a corrente, de modo que se tenha independência.]
26. Um professor dá um teste rápido, constante de 20 questões do tipo certo-errado. Para testar a hipótese de o estudante estar adivinhando a resposta, ele adota a seguinte regra de decisão: "Se 13 ou mais questões estiverem corretas, ele não está adivinhando". Qual é a probabilidade de rejeitarmos a hipótese, sendo que na realidade ela é verdadeira?
27. Um distribuidor de sementes determina, por meio de testes, que 5% das sementes não germinam. Ele vende pacotes com 200 sementes com garantia de 90% de germinação. Qual é a probabilidade de que um pacote não satisfaça à garantia?