ACH4513
INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

2º Sem/2017

Testes de Hipóteses Não Paramétricos

Prof. Marcelo S. Lauretto
marcelolauretto@usp.br
www.each.usp.br/lauretto

Referência:
W.O.Bussab, P.A.Morettin. Estatística Básica, 6ª Edição. São Paulo: Saraiva, 2010 – Capítulo 11

Comparação entre duas populações: Teste de Wilcoxon ou Mann-Whitney

- Consideremos o caso em que temos duas amostras independentes $X_1, \ldots, X_n \sim P_1$ e $Y_1, \ldots, Y_m \sim P_2$, em que P_1 e P_2 são distribuições de probabilidade desconhecidas
- Nosso interesse é testar a hipótese
$$H_0: P_1 = P_2.$$
- Esse teste é usualmente denominado *teste de homogeneidade*, uma vez que o interesse é testar a homogeneidade das populações de onde as amostras foram extraídas
- Vimos em aulas anteriores o teste t de Student para comparação de médias de duas populações, assumindo que P_1 e P_2 sejam distribuições normais
- Todavia, o teste t não é adequado quando as amostras provêm de distribuições muito distintas da distribuição normal, p.ex.:
  - Distribuições com alta assimetria
  - Variáveis qualitativas ordinais
    - Níveis de concordância (escala de Likert)
    - Níveis de satisfação, etc

Comparação entre duas populações: Teste de Wilcoxon ou Mann-Whitney

- Apresentaremos um teste que não faz suposições a respeito da forma das distribuições P_1 e P_2 a não ser que as variáveis envolvidas tenham uma escala de medida pelo menos ordinal
  - Ou seja, o teste pode abordar o caso de variáveis qualitativas ordinais e variáveis quantitativas
- Esse teste – chamado de Wilcoxon ou de Mann-Whitney – pertence a uma categoria de procedimentos chamados *não-paramétricos* ou *livres de distribuição*
- O teste de Wilcoxon é baseado *nos postos* dos valores obtidos combinando-se as duas amostras
  - Isso é feito ordenando-se esses valores, do menor para o maior, independentemente do fato de qual população cada valor provém
  - A estatística do teste é a soma dos postos associados aos valores amostrados de uma das populações, P_2 por exemplo
  - Se essa soma for grande, isso é uma indicação de que os valores dessa população tendem a ser maiores do que os valores de P_1, e, então rejeitamos a hipótese H_0

Comparação entre duas populações: Teste de Wilcoxon ou Mann-Whitney

- No caso de termos variáveis aleatórias qualitativas ordinais, comumente associamos números às diversas categorias, segundo as quais a variável é classificada, p.ex.:
  - 1 para *ruim*, 2 para *regular*, 3 para *bom*, 4 para *muito bom*, 5 para *ótimo*
- O desenvolvimento teórico do teste supõe que as observações sejam todas distintas (sem repetições ou *empates*)
  - Veremos como associar postos nos casos de empates
- Consideremos separadamente os seguintes casos:
  - Observações distintas (sem empates)
  - Observações com repetição

Comparação entre duas populações: Teste de Wilcoxon ou Mann-Whitney

- Caso 1: observações distintas (sem empates)

- Suponha que tenhamos *N* observações $Z_1, \dots, Z_N$. Ordenando-as da menor para a maior obtemos as estatísticas de ordem $Z_{(1)} \leq Z_{(1)} \leq \cdots \leq Z_{(N)}$
  – Inicialmente, suponha que não haja observações coincidentes, de modo que os sinais $\leq$ sejam substituídos por $<$
  – Então, associamos números (normalmente 1,2,...,*N*), chamados *postos*, que correspondem às posições das observações na ordenação.
  – O posto de Z_i é igual a $1 + (\text{quantidade de } Z_j < Z_i)$
  – Assim, dadas as observações

$$Z_1 = 0.3, \qquad Z_2 = 1.5, \qquad Z_3 = -0.5, \qquad Z_4 = 2.0,$$

  os postos de Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 serão, respectivamente,

$$R_1 = 2, \qquad R_2 = 3, \qquad R_3 = 1, \qquad R_4 = 4,$$

  já que a ordenação resulta em

$$Z_3 < Z_1 < Z_2 < Z_4$$

Comparação entre duas populações: Teste de Wilcoxon ou Mann-Whitney

- Exemplo 13.6.
  - Em um estudo sobre um método para ensinar matemática elementar, foram selecionadas cinco crianças. Destas, três são escolhidas ao acaso e ensinadas segundo o novo método, enquanto as outras duas funconaram como controle e receberam instrução por um método tradicional
  - Após um período de cinco semanas é feito um teste, e as crianças são ordenadas segundo seu desempenho: a criança que tiver menor nota recebe posto 1, etc., até a criança que tiver maior nota recebe posto 5
  - O método de ensino é considerado eficaz se as três crianças que recebem o novo método tiverem postos altos nessa ordenação combinada das cinco crianças
  - Seja H_0 a hipótese nula de que o tratamento (novo método) não tem efeito, isto é, a nota da criança não é afetada se ela for ou não ensinada pelo novo método.
  - Se H_0 for verdadeira, o posto atribuído a cada criança é determinado somente pela sua inteligência, ou seja, a ordenação das crianças não depende de qual recebe tratamento e qual funciona como controle

Comparação entre duas populações: Teste de Wilcoxon ou Mann-Whitney

- Exemplo 13.6.
  - As crianças e seus postos podem ser divididos em dois grupos (tratados e controle) de $\binom{5}{3} = 10$ maneiras diferentes (o valor 3 no coeficiente binomial corresponde ao número de crianças no grupo de tratamento)
  - Consideremos a estatística
$$W_S = S_1 + S_2 + S_3 \, ,$$
onde S_1, S_2, S_3 são os postos das crianças que receberam o tratamento na amostra combinada
  - A Tabela 13.3 mostra todos os casos possíveis para a ordenação das crianças nos dois grupos, bem como os possíveis valores da estatística W_S
  - A suposição de que as três crianças recebendo o tratamento são selecionadas ao acaso e de que os tratamentos são equivalentes implica que todas as 10 possibilidades têm a mesma probabilidade 1/10

Comparação entre duas populações: Teste de Wilcoxon ou Mann-Whitney

- Exemplo 13.6.

Tabela 13.3: Valores de W_S para o Exemplo 13.6.

Postos					W_S
1	2	3	4	5	
C	C	T	T	T	12
C	T	C	T	T	11
T	C	C	T	T	10
C	T	T	C	T	10
T	C	T	C	T	9
C	T	T	T	C	9
T	C	T	T	C	8
T	T	C	T	C	7
T	T	T	C	C	6
T	T	C	C	T	8

Comparação entre duas populações: Teste de Wilcoxon ou Mann-Whitney

- Exemplo 13.6.
  - Poderíamos considerar como regra de decisão para rejeitar H_0 a ocorrência de $W_S = 12$, correspondendo à ocorrência de CCTTT (clara superioridade do tratamento)
  - A probabilidade de esse evento ocorrer por mero acaso, ou seja, quando os métodos são equivalentes (probabilidade do erro de tipo I), é
    $$P(W_S = 12 \mid H_0 \text{ verdadeiro}) = 0.1$$
    Mas, como vimos anteriormente, o usual é fixarmos α e não a regra de decisão
  - Em nosso exemplo, rejeitamos H_0 para grandes valores de W_S, ou seja, $W_S \geq c$, onde *c* é uma constante determinada a partir do nível de significância do teste, α. Obtemos assim o teste de Wilcoxon:

$$\text{“}\textit{Rejeite } H_0 \textit{ se } W_S \geqslant c, \textit{ onde } c \textit{ é determinada por } P(W_S \geqslant c | H_0 \textit{ é verdadeira}) = \alpha\text{”.}$$

  - A distribuição nula (isto é, sob H_0) de W_S é obtida da Tabela 13.3 e está na tabela 13.4
    - Note que, nesse exemplo, podemos encontrar *c* somente para valores de α iguais a 0.1, 0.2, 0.4, etc.

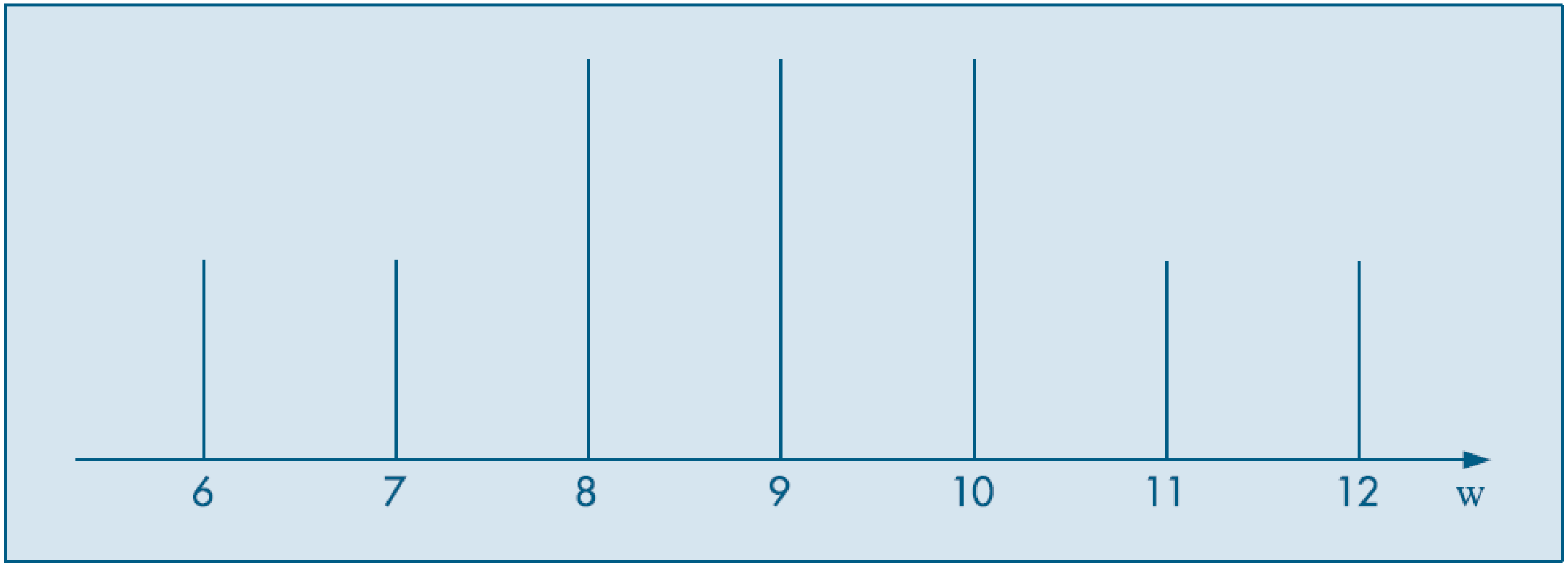
Comparação entre duas populações: Teste de Wilcoxon ou Mann-Whitney

- Exemplo 13.6.

Tabela 13.4: Distribuição de W_S, observações distintas.

w	6	7	8	9	10	11	12
$P(W_S = w)$	1/10	1/10	2/10	2/10	2/10	1/10	1/10

Figura 13.3: Distribuição de W_S para o Exemplo 13.6.



Comparação entre duas populações: Teste de Wilcoxon ou Mann-Whitney

- Consideremos, agora, a situação geral.
- Queremos testar
$$H_0: P_1 = P_2.$$
- Temos duas amostras independentes $X_1, \dots, X_n \sim P_1$ e $Y_1, \dots, Y_m \sim P_2$.
- Seja $N = n + m$ e combinamos as duas amostras numa só, ordenando os N valores do menor para o maior e chamemos $S_1 < S_2 < \cdots < S_m$ os postos dos Y_i (tratamentos) e $R_1 < R_2 < \cdots < R_n$ os postos dos X_i (controles)
  – Consideramos que não haja empates
- Seja
$$W_S = S_1 + S_2 + \cdots + S_m$$
a soma dos postos dos tratamentos.
- Rejeitamos H_0 se:
  – $W_S \leq c_{min}(H_1$: valores sob P_2 menores do que valores sob $P_1)$
  – $W_S \geq c_{max}$ (H_1: valores sob P_2 maiores do que valores sob P_1)
  – $W_S \leq c_1$ ou $W_S \geq c_2 (H_1: P_1 \neq P_2)$,

  onde c_{min}, c_{max}, c_1, c_2 são especificados a partir da distribuição de W_S sob H_0 e de α

Comparação entre duas populações: Teste de Wilcoxon ou Mann-Whitney

- Para a estatística W_S, temos:

$$E(W_S) = \frac{m(N+1)}{2},$$

$$Var(W_S) = \frac{nm(N+1)}{12}.$$

- Para valores moderados de *n* e *m*, a distribuição de W_S pode ser aproximada pela distribuição normal:
para $n, m \longrightarrow \infty$,

$$Z = \frac{W_S - E(W_S)}{\sqrt{Var(W_S)}} \sim N(0,1)$$

Comparação entre duas populações: Teste de Wilcoxon ou Mann-Whitney

- Uma estatística equivalente a W_S é
$$U_S = W_S - \frac{1}{2}m(m+1)$$
chamada *estatística de Mann-Whitney*.
- Interpretação da estatística U_S:
  - Considere, para $i = 1,2,\ldots,m$
  - T_i = número de elementos do grupo de controle com valores menores do que o *i*-ésimo elemento do grupo de tratamento
  - $U_S = \sum_{i=1}^{m} T_i$ = número de vezes em que um elemento do grupo de tratamento é maior do que um elemento do grupo de controle
  - Exemplo: Considere o grupo de notas da tabela abaixo:

Grupo controle	65	66	68	69	71	73	75	76	78	84	90
Grupo tratamento	70	72	74	79	80	82	86	91	93	95	

  - Nesse caso, teremos
$$U_S = 4+5+6+9+9+9+10+11+11+11 = 85$$

Comparação entre duas populações: Teste de Wilcoxon ou Mann-Whitney

- Uma estatística equivalente a W_S é
$$U_S = W_S - \frac{1}{2}m(m+1)$$
chamada *estatística de Mann-Whitney*.
- Relação entre U_S e W_S:
  - Note que $S_i = T_i + i$
  - Logo,
$$W_S = \sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{i=1}^{m} (T_i + i) = \sum_{i=1}^{m} T_i + \frac{1}{2}m(m+1) = U_S + \frac{1}{2}m(m+1)$$
de onde temos $U_S = W_S - \frac{1}{2}m(m+1)$

Comparação entre duas populações: Teste de Wilcoxon ou Mann-Whitney

- Vantagens da estatística U_S:
  - A distribuição de U_S para $n = n_1$ e $m = m_1$ é a mesma que a distribuição de U_S quando os tamanhos são invertidos, isto é, para $n = m_1$ e $m = n_1$. Isso não ocorre com W_S
  - Os valores mínimo e máximo de U_S são, respectivamente:
    - $\min(U_S) = 0$ → todos os valores no grupo de tratamento são <u>menores</u> do que os valores no grupo de controle
    - $\max(U_S) = nm$ → todos os valores no grupo de tratamento são <u>maiores</u> do que os valores no grupo de controle
  - Essas propriedades simplificam o cálculo da distribuição exata de U_S

Comparação entre duas populações: Teste de Wilcoxon ou Mann-Whitney

- Cálculo da distribuição exata de U_S sob a hipótese $H_0: P_1 = P_2$: função recursiva apresentada por Mann & Whitney (1947)*:
$$\mathrm{P}(U|n,m) = \frac{n}{n+m}\mathrm{P}(U-m|n-1,m) + \frac{m}{n+m}\mathrm{P}(U|n,m-1),$$
onde:
  - $\mathrm{P}(U|n,m) = 0$ se $U < 0$;
  - Para $n = 0$ ou $m = 0$, $\mathrm{P}(U|n,m) = 1$ se $U = 0$; $\mathrm{P}(U|n,m) = 0$ se $U \neq 0$.
  - Essa função pode ser calculada no Excel, criando-se macros

- Cálculo do nível descritivo (p-valor) do teste, dada a estatística observada U_S:
  - $H_1: P_1 \neq P_2 \rightarrow pv = \Pr(U \leq u) + \Pr(U \geq mn - u) = 2\Pr(U \leq u) = 2F(u)$, onde $u = \min(U_S, mn - U_S)$ e $F()$ denota a f.d.a exata de U
  - $H_1: P_1 < P_2 \rightarrow pv = \Pr(U \geq U_S) = 1 - F(U_S)$
  - $H_1: P_1 > P_2 \rightarrow pv = \Pr(U \leq U_S) = F(U_S)$

*Mann, Henry B.; Whitney, Donald R. (1947). "On a Test of Whether one of Two Random Variables is Stochastically Larger than the Other". Annals of Mathematical Statistics. 18 (1): 50–60.

Comparação entre duas populações: Teste de Wilcoxon ou Mann-Whitney

- Aproximação da distribuição de U_S pela distribuição normal:

$$E(U_S) = \frac{nm}{2} \qquad Var(U_S) = \frac{nm(N+1)}{12}$$

para $n, m \longrightarrow \infty$,

$$Z = \frac{U_S - E(U_S)}{\sqrt{Var(U_S)}} \sim N(0,1)$$

- Cálculo do nível descritivo (p-valor) do teste, sob a estatística observada z:
  - $H_1: P_1 \neq P_2$ → $pv = \Pr(|Z| \geq |z|) = 2\phi(-|z|)$, onde ϕ denota a f.d.a da distribuição normal padrão
  - $H_1: P_1 < P_2$ → $pv = \Pr(Z \geq z) = 1 - \phi(z)$
  - $H_1: P_1 > P_2$ → $pv = \Pr(Z \leq z) = \phi(z)$

Comparação entre duas populações: Teste de Wilcoxon ou Mann-Whitney

- Caso 2: observações com empates
- Para amostras com empates, o seguinte procedimento pode ser adotado:

1. Organize todos os valores observados (grupo de controle e grupo de tratamento) em uma única lista $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$
2. Atribua os postos para todas as observações, com o seguinte cuidado: onde ocorrer agrupamentos de valores empatados, atribua para todos esses valores o ponto central do ranking original.
    - P.ex. se a lista contiver os valores (3, 5, 5, 5, 5, 8), os postos serão: 1, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 6
    - A forma de calcular esse posto médio é a seguinte: se $Z_i, \ldots, Z_j$ têm o mesmo valor, o posto médio será $(i + j)/2$
3. Calcule a estatística $W_S = S_1 + S_2 + \cdots + S_m$, onde S_i corresponde ao posto ajustado do i-ésimo valor do grupo de tratamento
4. Obtenha a estatística

$$U_S = W_S - \frac{1}{2} m(m + 1)$$

Comparação entre duas populações: Teste de Wilcoxon ou Mann-Whitney

- Caso 2: observações com empates

5. Para valores pequenos de *n*,*m*, pode-se usar a distribuição exata de U_S conforme visto anteriormente
6. Para valores maiores de *n*,*m* e proporção baixa de empates, pode-se utilizar a aproximação pela distribuição normal. Nesse caso, a média $\mathrm{E}(U_S)$ é a mesma já apresentada anteriormente, e a variância de U_S é dada por

$$\mathrm{Var}(U_S) = \frac{mn(N+1)}{12} - \frac{mn}{12N(N-1)} \sum_{i=1}^{e} (d_i^3 - d_i).$$

onde d_i é o número de observações empatadas no i-ésimo posto corrigido e e denota o número de valores distintos.

– Por exemplo, para a lista de valores (3, 5, 5, 5, 5, 8), (com postos corrigidos 1, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 6), $e = 1$, $d_1 = 1, d_2 = 4, d_3 = 1$

Comparação sobre amostras pareadas: Teste dos postos sinalizados de Wilcoxon

- Considere a situação em que temos uma amostra de pares $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$, onde cada par (X_i, Y_i) corresponde aos valores das variáveis X e Y para o i-ésimo elemento da amostra
- Vimos anteriormente o teste t de Student para tratar esse problema
  - Possivelmente inadequado se a distribuição das diferenças entre X_i e Y_i não for normal;
- Aqui apresentaremos um teste não paramétrico denominado *teste dos postos sinalizados de Wilcoxon*
  - Não assume uma distribuição específica (daí a expressão *não paramétrico*):
- Inicialmente, definimos a variável aleatória $D = X - Y$, e assim obteremos a amostra $D_1, D_2, \ldots, D_n$ resultante das diferenças entre os valores dos pares.
  - Assim como no teste t de Student, reduzimos a um problema de uma única população

Comparação sobre amostras pareadas: Teste dos postos sinalizados de Wilcoxon

- Supomos que a escala das diferenças seja pelo menos intervalar e que os pares (X_i, Y_i) constituam uma AAS
  - Isso implica que os D_i são independentes, com a mesma mediana.
- Suponha, ainda, que a distribuição dos D_i seja simétrica, ou seja, as médias e medianas coincidem

- **Exemplo 13.11 (adaptado)**.
  - Suponha que se queira comparar os tempos de processamento entre dois programas distintos *A* e *B*. Para a comparação, cinco arquivos similares são selecionados ao acaso. Cada um desses arquivos é processado pelos dois programas no mesmo computador, e os respectivos tempos de processamento são registrados.
  - Tabela 13.9 apresenta os tempos de execução e respectivas estatísticas

Comparação sobre amostras pareadas: Teste dos postos sinalizados de Wilcoxon

Tabela 13.9: Tempo de processamento (em segundos) dos programas A e B sobre cinco arquivos similares.

Par	Tempo por arquivo processado (seg)					Média (seg)
	1	2	3	4	5	
Tempo de B (X)	300	410	420	410	400	388
Tempo de A (Y)	350	390	490	435	440	421
D = X-Y	-50	20	-70	-25	-40	-33
Posto de |D| (R)	4	1	5	2	3	-
Posto sinalizado (SR)	-4	+1	-5	-2	-3	-

- Queremos testar a hipótese de que ambos os programas têm tempos de processamento equivalentes, contra a hipótese de que os tempos de B são menores, ou seja:
  $H_0: \mu_X - \mu_Y = \mu_D = 0$
  (programas têm os mesmos tempos médios de processamento)
  $H_1: \mu_X - \mu_Y = \mu_D < 0$
  (programa B tem tempo médio menor de processamento)

Comparação sobre amostras pareadas: Teste dos postos sinalizados de Wilcoxon

- Para testar a hipótese, usamos os seguintes passos:

1. Calcule $D_i = X_i - Y_i,\ i = 1,2,\dots,n$ (3ª linha da tabela)
   - Todos os pares de observações em que $D_i = 0$ deverão ser excluídos do restante da análise, e o tamanho da amostra deve ser recalculado apenas para os pares sem empates
2. Ordene os valores de $|D_i|$ em ordem crescente (ou seja, os pares são ordenados em ordem crescente dos valores absolutos de D_i
3. Calcule os postos de $|D_i|$.
   - Denotamos por R_i o posto associado a $|D_i|$
   - No caso de empates entre postos (ou seja, valores repetidos de $|D_i|$), atribua o posto médio:
     – Se $|D_j|,\dots,|D_k|$ têm o mesmo valor, o posto médio será $(j+k)/2$
     – Ex: Se $|D_3| = |D_4| = |D_5|$, então $R_3 = R_4 = R_5 = 4$

Comparação sobre amostras pareadas: Teste dos postos sinalizados de Wilcoxon

- Para testar a hipótese, usamos os seguintes passos (cont):

4. Calcula-se o “posto sinalizado”, que corresponde a atribuir ao posto de $|D_i|$ o sinal correspondente a D_i (5ª linha da tabela)
   - Denotamos por SR_i o posto sinalizado de $|D_i|$:
     $$SR_i = \begin{cases} +R_i \text{ se } D_i > 0 \\ -R_i \text{ se } D_i < 0 \end{cases}$$
     - Por exemplo, para a primeira observação, $D_1 = 300 - 350 = -50$, com $|D_1| = 50$, que tem posto 4 e, portanto, $SR_i = -4$.
   - Se houver empates entre postos, aplicam-se os sinais aos postos médios
     - Ex: Se $|D_3| = |D_4| = |D_5|$, sendo $D_3, D_5 > 0$ e $D_4 < 0$, então $SR_3 = 4,\ SR_4 = -4,\ SR_5 = 4$

Comparação sobre amostras pareadas: Teste dos postos sinalizados de Wilcoxon

- Para testar a hipótese, usamos os seguintes passos (cont):

5. Calculam-se as estatísticas:

$$T^+ = \text{soma dos postos positivos} = \sum_{D_i > 0} SR_i$$

$$T^- = -(\text{soma dos postos negativos}) = \sum_{D_i < 0} SR_i$$

  - No exemplo 13.11, $T^+ = 1$ (apenas uma observação) e $T^- = 14$ (quatro observações)
    - Como estamos interessados na hipótese alternativa $H_1: \mu_X - \mu_Y < 0$, vamos considerar T^+ (soma dos postos das observações dos casos em que o tempo de B foi maior) e rejeitar H_0 se T^+ for muito "pequeno"

Comparação sobre amostras pareadas: Teste dos postos sinalizados de Wilcoxon

- Para testar a hipótese, usamos os seguintes passos (cont):

6. Compara-se o valor observado de T^+ em relação à sua distribuição sob H_0.
   - Se não houver empates e $n \leq 50$, é possível calcular a distribuição exata de T^+ :
     - Se H_0 for verdadeira, cada posto tem a mesma probabilidade de ser associado com um sinal $+$ ou com um sinal $-$
     - Logo, a sequência de postos sinalizados é uma de todas as possíveis combinações de $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$
     - Existem 2^n tais combinações, toda equiprováveis sob H_0, ou seja, com probabilidade $1/2^n$
   - Para $n > 50$ ou quando ocorrerem empates entre postos, pode-se usar a estatística abaixo:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} SR_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {SR_i}^2}},$$

que tem uma distribuição aproximadamente $N(0{,}1)$.

Comparação sobre amostras pareadas: Teste dos postos sinalizados de Wilcoxon

- Para testar a hipótese, usamos os seguintes passos (cont):

7. Cálculo do nível descritivo (p-valor): denotando por v o valor observado da estatística V:
   - H_1: $\mu_X - \mu_Y = \mu_D \neq 0 \rightarrow pv = \Pr(|V| \geq |v|) = 2\phi(-|v|)$, onde ϕ denota a f.d.a da distribuição normal padrão
   - H_1: $\mu_X - \mu_Y = \mu_D < 0 \rightarrow pv = \Pr(V \leq v) = \phi(v)$
   - H_1: $\mu_X - \mu_Y = \mu_D > 0 \rightarrow pv = \Pr(V \geq v) = 1 - \phi(v)$

Comparação sobre amostras pareadas: Teste dos postos sinalizados de Wilcoxon

- Voltando ao Exemplo 13.11:
  - Existem $2^5 = 32$ possíveis sequências de postos sinalizados, apresentadas na Tabela 13.10 (com os respectivos valores de T^+).
  - Tabela 13.11 apresenta a distribuição de T^+
    - Note que a distribuição de T^+ é simétrica, com média e mediana iguais a 7,5

Tabela 13.11: Distribuição de T^+ sob H_0.

T^+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Freqüência	1	1	1	2	2	3	3	3	3	3	3	2	2	1	1	1

  - O p-valor do teste é $\mathrm{P}(T^+ \leq 1 | H_0) = 2/32 = 0{,}06$
    - Esse resultado sugere que o programa *B* possui tempo médio de processamento menor do que *A* (diferença média de 33 seg)

Comparação sobre amostras pareadas: Teste dos postos sinalizados de Wilcoxon

Tabela 13.10: Sinais possíveis para os postos, Exemplo 13.11 .

1	2	3	4	5	T^+	1	2	3	4	5	T^+
+	+	+	+	+	15	+	+	−	+	−	7
−	+	+	+	+	14	−	+	−	−	+	7
+	−	+	+	+	13	−	−	+	+	−	7
+	+	−	+	+	12	+	−	−	−	+	6
−	−	+	+	+	12	+	+	+	−	−	6
+	+	+	−	+	11	−	+	−	+	−	6
−	+	−	+	+	11	+	−	−	+	−	5
+	+	+	+	−	10	−	+	+	−	−	5
−	+	+	−	+	10	−	−	−	−	+	5
+	−	−	+	+	10	+	−	+	−	−	4
−	+	+	+	−	9	−	−	−	+	−	4
−	−	−	+	+	9	+	+	−	−	−	3
+	−	+	−	+	9	−	−	+	−	−	3
+	+	−	−	+	8	−	+	−	−	−	2
+	−	+	+	−	8	+	−	−	−	−	1
−	−	+	−	+	8	−	−	−	−	−	0

Comparação sobre amostras pareadas: Teste dos postos sinalizados de Wilcoxon

- Voltando ao Exemplo 13.11 (cont):

X	Y	D	|D|	sinal(D)	R	SR	R^2
410	390	20	20	1	1	1	1
410	435	-25	25	-1	2	-2	4
400	440	-40	40	-1	3	-3	9
300	350	-50	50	-1	4	-4	16
420	490	-70	70	-1	5	-5	25

V = -1.753; p-valor = 0.04

Comparação sobre amostras pareadas: Teste dos postos sinalizados de Wilcoxon

- Exemplo: comparação entre dois protetores solares
  - Suponha que o interesse seja comparar a eficácia de dois protetores solares, denominados X e Y.
  - Oito voluntários participaram de um experimento durante o qual suas costas, previamente untadas com os dois protetores, ficaram expostos ao sol
    - Para cada voluntário, passou-se o protetor X em um dos lados das costas e o protetor Y no outro lado (sendo os lados sorteados em cada caso)
    - Depois do tempo pré-determinado, mediu-se o grau de vermelhidão em cada lado.
    - Os resultados são apresentados na tabela a seguir
    - Observa-se que, em geral, os graus de vermelhidão com o produto X tendem a ser maiores do que com o produto Y

Comparação sobre amostras pareadas: Teste dos postos sinalizados de Wilcoxon

- Exemplo: comparação entre dois protetores solares (cont)

X	Y	D	|D|	sinal(D)	R	SR	R^2
51	46	5	5	1	4	4	16
48	45	3	3	1	2	2	4
52	53	-1	1	-1	1	-1	1
62	48	14	14	1	8	8	64
64	57	7	7	1	5	5	25
51	55	-4	4	-1	3	-3	9
55	44	11	11	1	7	7	49
60	50	10	10	1	6	6	36

– O valor observado da estatística V é

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} SR_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {SR_i}^2}} = \frac{28}{\sqrt{204}} = 1.96$$

- H_1: $\mu_X - \mu_Y = \mu_D \neq 0 \rightarrow pv = \Pr(|V| \geq |1.96|) = 2\phi(-|v|)$=0.0499, onde ϕ denota a f.d.a da distribuição normal padrão
- H_1: $\mu_X - \mu_Y = \mu_D > 0 \;\rightarrow pv = \Pr(V \geq v) = 1 - \phi(v) = 0.025$