

ACH4513

INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

2º Sem/2017

Breve revisão sobre a distribuição normal

Prof. Marcelo S. Lauretto
marcelolauretto@usp.br
www.each.usp.br/lauretto

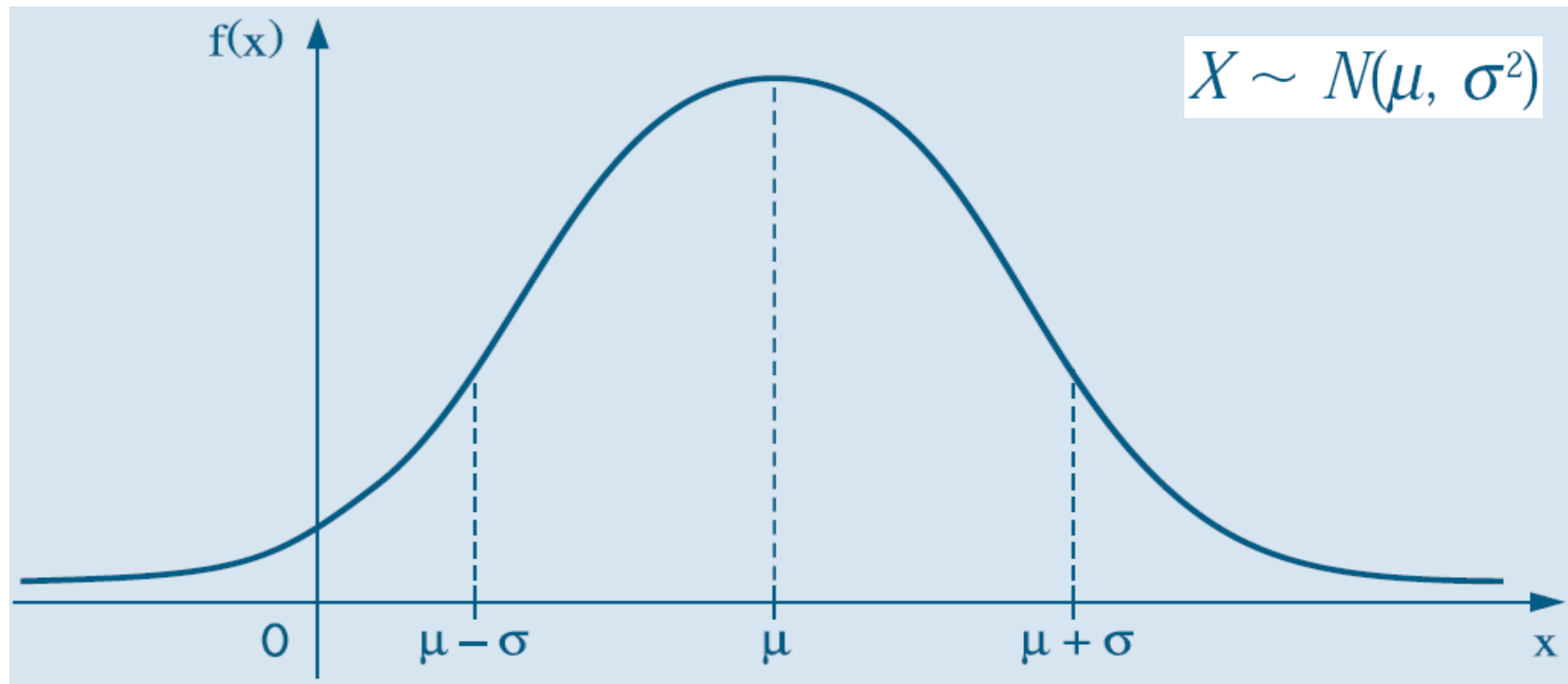
Referência:

W.O.Bussab, P.A.Morettin. Estatística Básica, 6ª Edição.
São Paulo: Saraiva, 2010 – Capítulo 10

Distribuição normal

- Uma variável X com distribuição normal com média μ e variância σ^2 possui função de densidade de probabilidade:

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$



Distribuição normal padrão

- Quando $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, temos uma distribuição normal padrão:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad -\infty < z < \infty$$

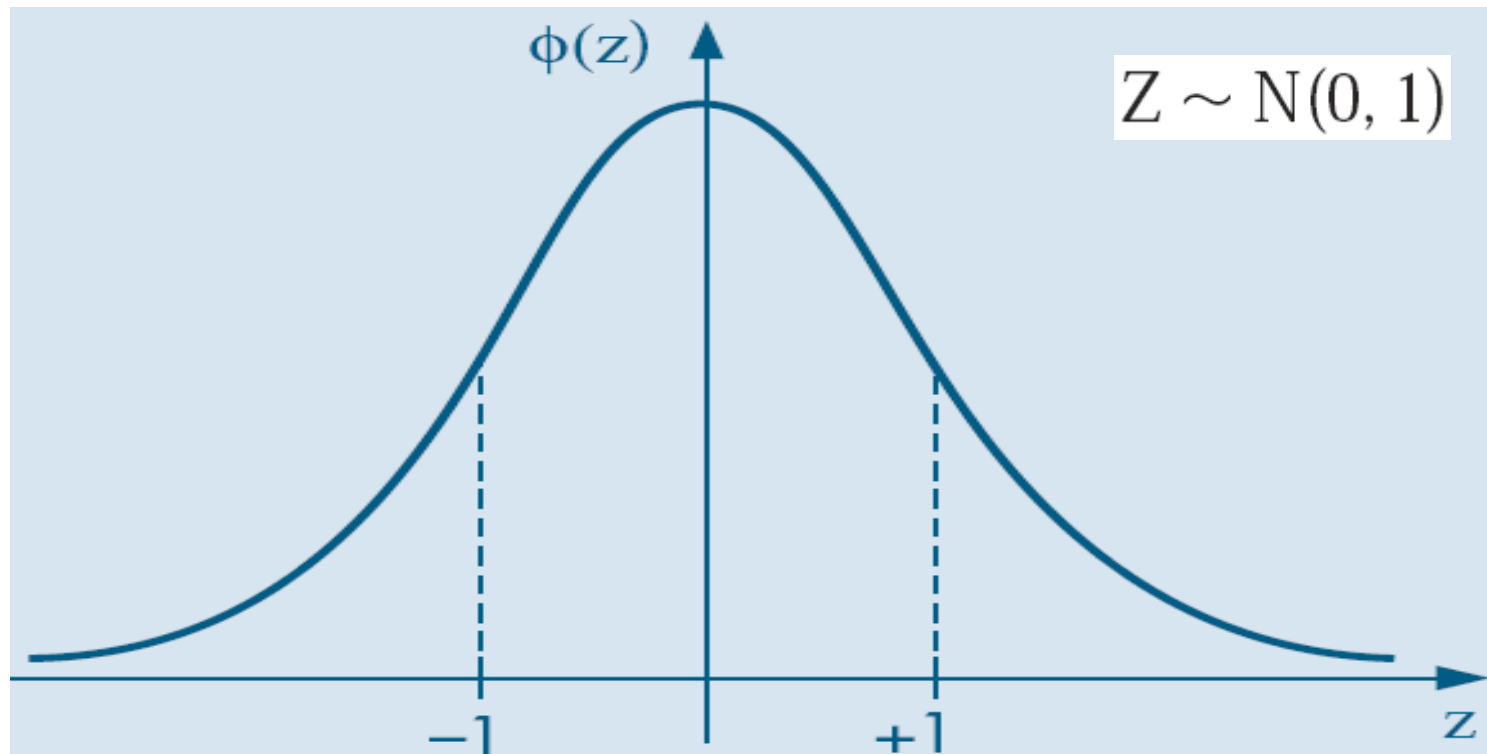
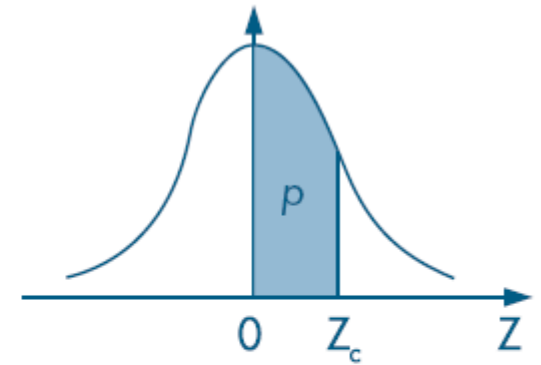


Tabela da distribuição normal padrão

Tabela III — Distribuição Normal Padrão

$$Z \sim N(0, 1)$$

Corpo da tabela dá a probabilidade p , tal que $p = P(0 < Z < Z_c)$



parte inteira e primeira decimal de Z_c	Segunda decimal de Z_c										parte inteira e primeira decimal de Z_c
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	p = 0										
0,0	00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586	0,0
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535	0,1
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409	0,2
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173	0,3
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793	0,4
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240	0,5
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490	0,6
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524	0,7
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327	0,8
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891	0,9
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214	1,0

Tabela da distribuição normal padrão

Tabela III (cont)

parte inteira e primeira decimal de Z_c	Segunda decimal de Z_c										parte inteira e primeira decimal de Z_c
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298	1,1
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147	1,2
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774	1,3
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189	1,4
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408	1,5
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449	1,6
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327	1,7
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062	1,8
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670	1,9
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169	2,0
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574	2,1
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899	2,2
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158	2,3
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361	2,4

Padronização

- Se Quando $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então a variável aleatória definida por

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

terá uma distribuição normal padrão

- Por quê:

- $E[Z] = E\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = \frac{E[X] - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0$

- $\text{Var}[Z] = \text{Var}\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma^2} (\text{Var}[X] - \text{Var}[\mu]) = \frac{1}{\sigma^2} \sigma^2 = 1$

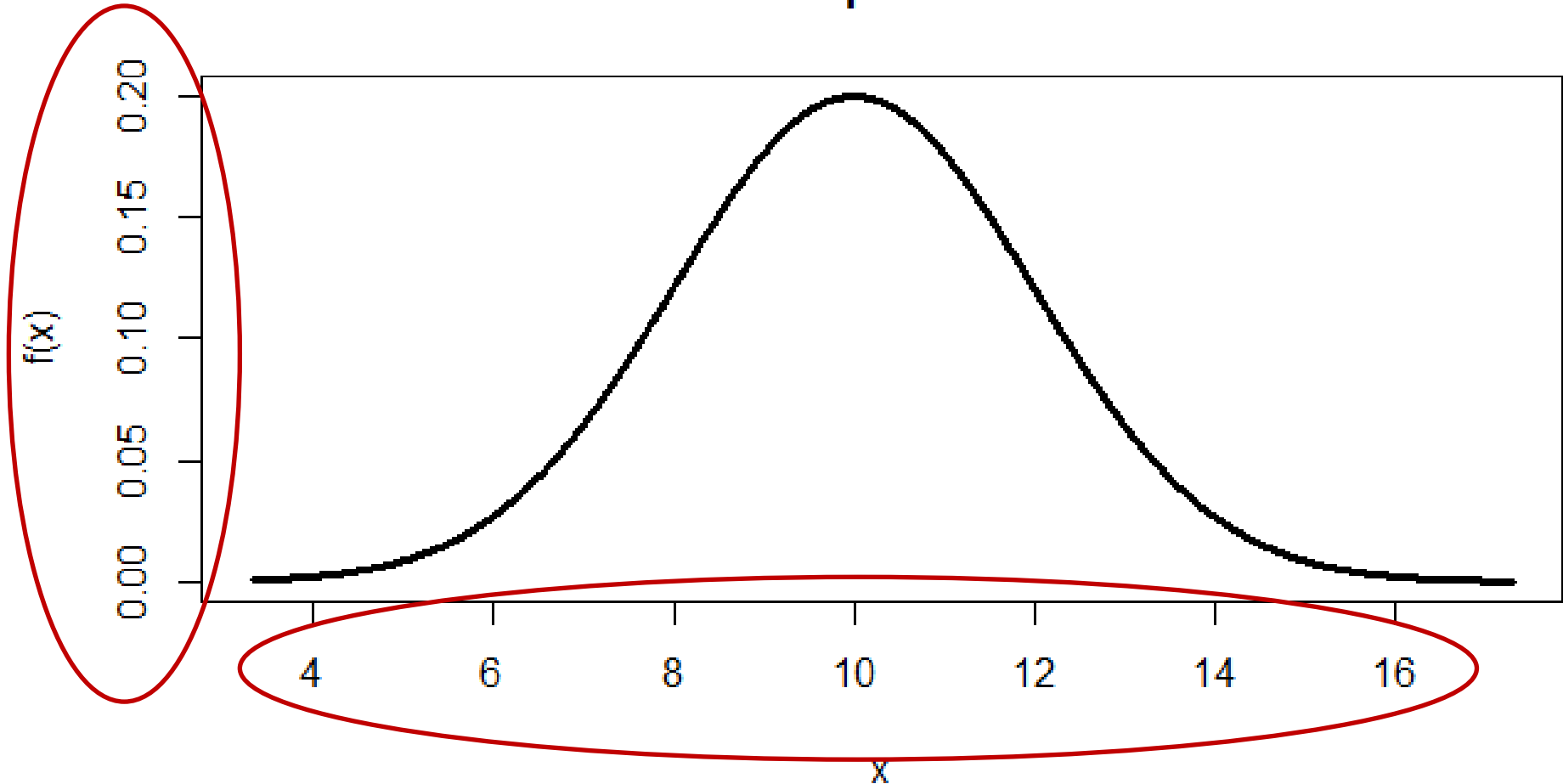
- Importante: Note que

$$\begin{aligned} \Pr(x_{\min} < X < x_{\max}) &= \Pr\left(\frac{x_{\min} - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{x_{\max} - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Pr\left(\frac{x_{\min} - \mu}{\sigma} < Z < \frac{x_{\max} - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Padronização

- Exemplo: $X \sim N(10, 4) \rightarrow Z = \frac{X-10}{2}$

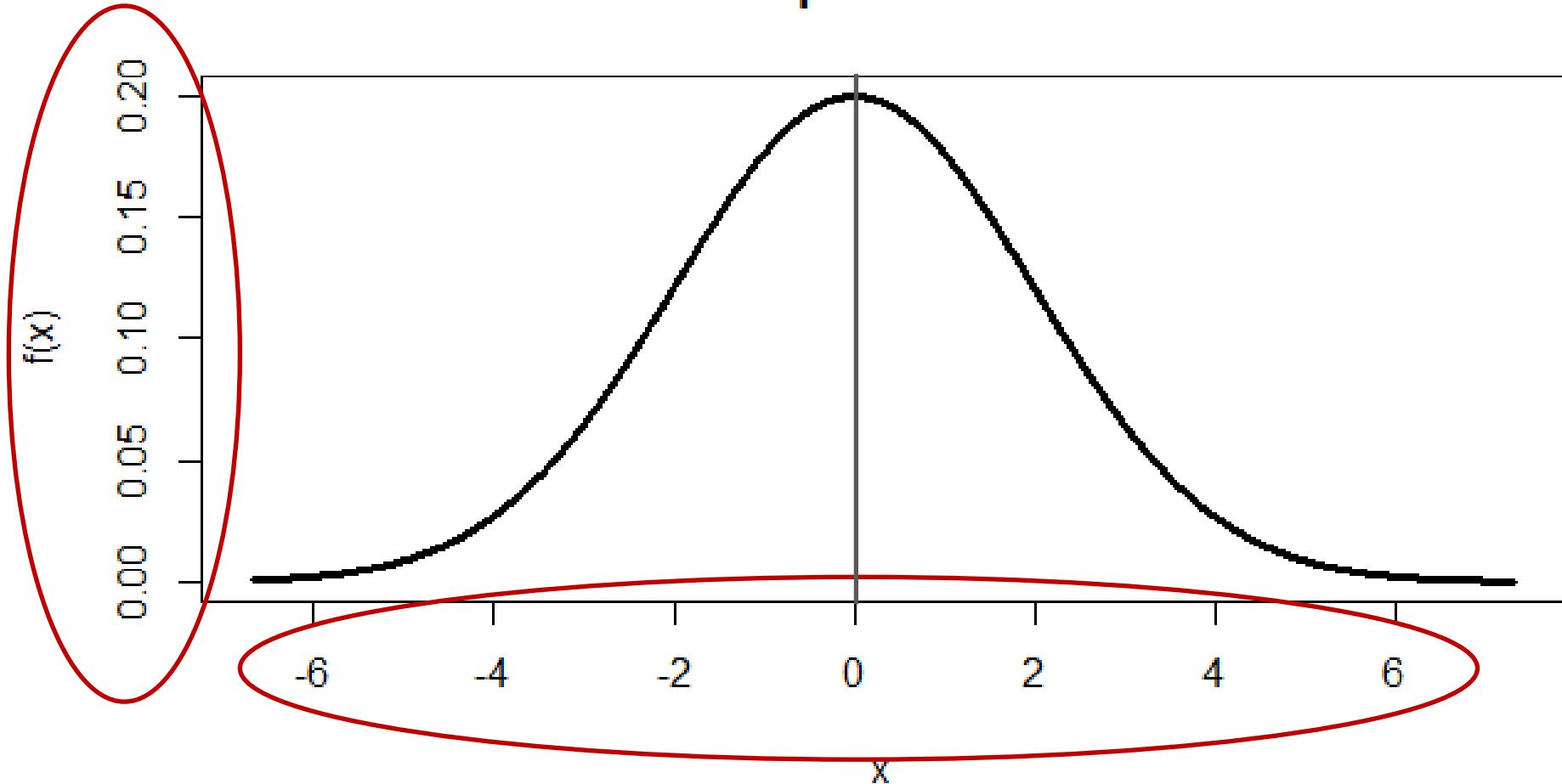
f.d.p de X



Padronização

- Exemplo: $X \sim N(10, 4) \rightarrow Z = \frac{X-10}{2}$

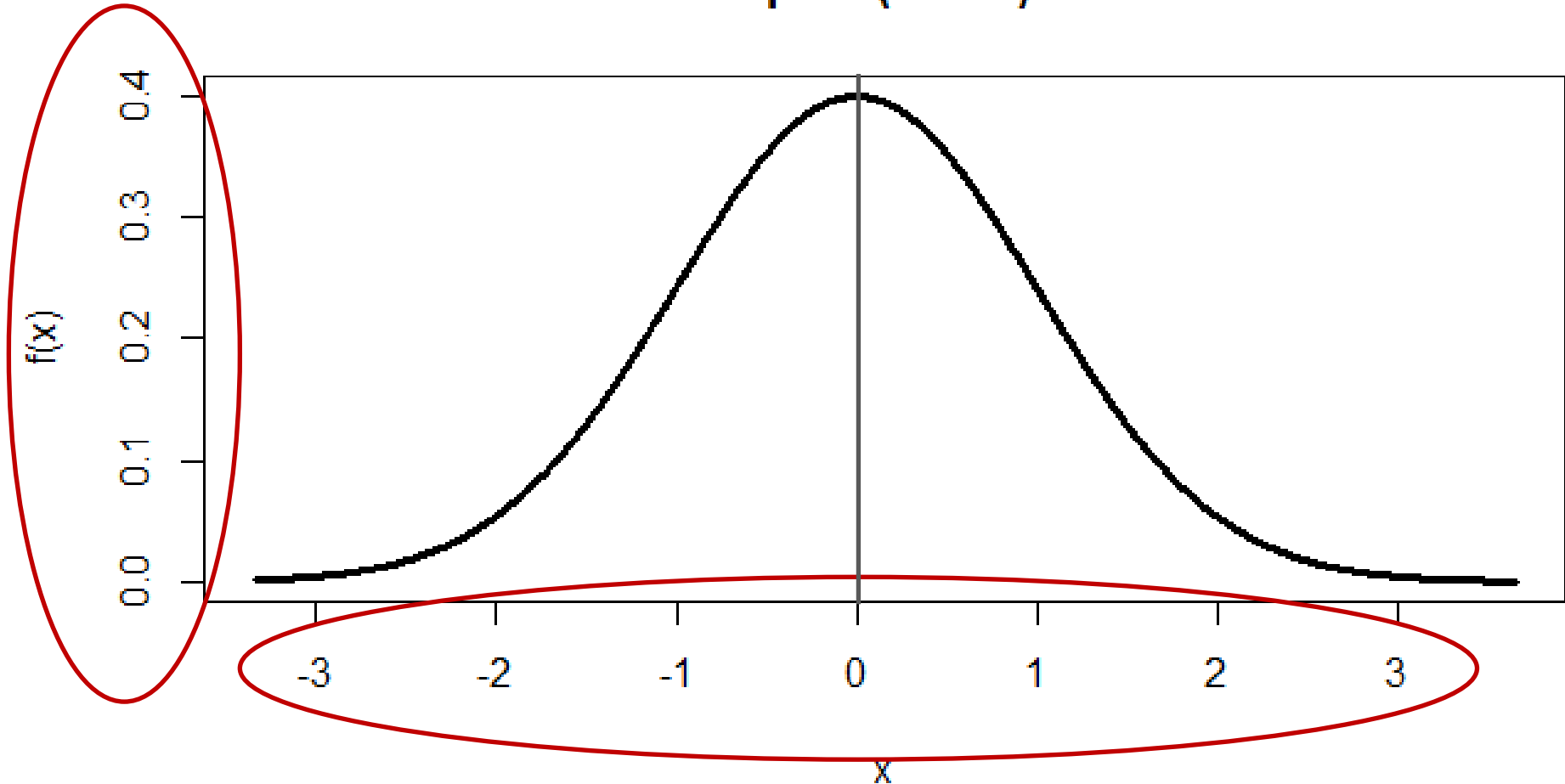
f.d.p de $X - 10$



Padronização

- Exemplo: $X \sim N(10, 4) \rightarrow Z = \frac{X-10}{2}$

f.d.p de $(X - 10)/2$



Padronização

- A transformação Z é usualmente denominada *padronização* de X
 - Facilita cálculos manuais, pois pode-se usar a tabela da distribuição normal padrão para calcular as probabilidades de interesse
 - Desnecessária se os cálculos forem realizados em programas que implementam a distribuição normal para μ e σ quaisquer (p.ex. Excel, R, etc)

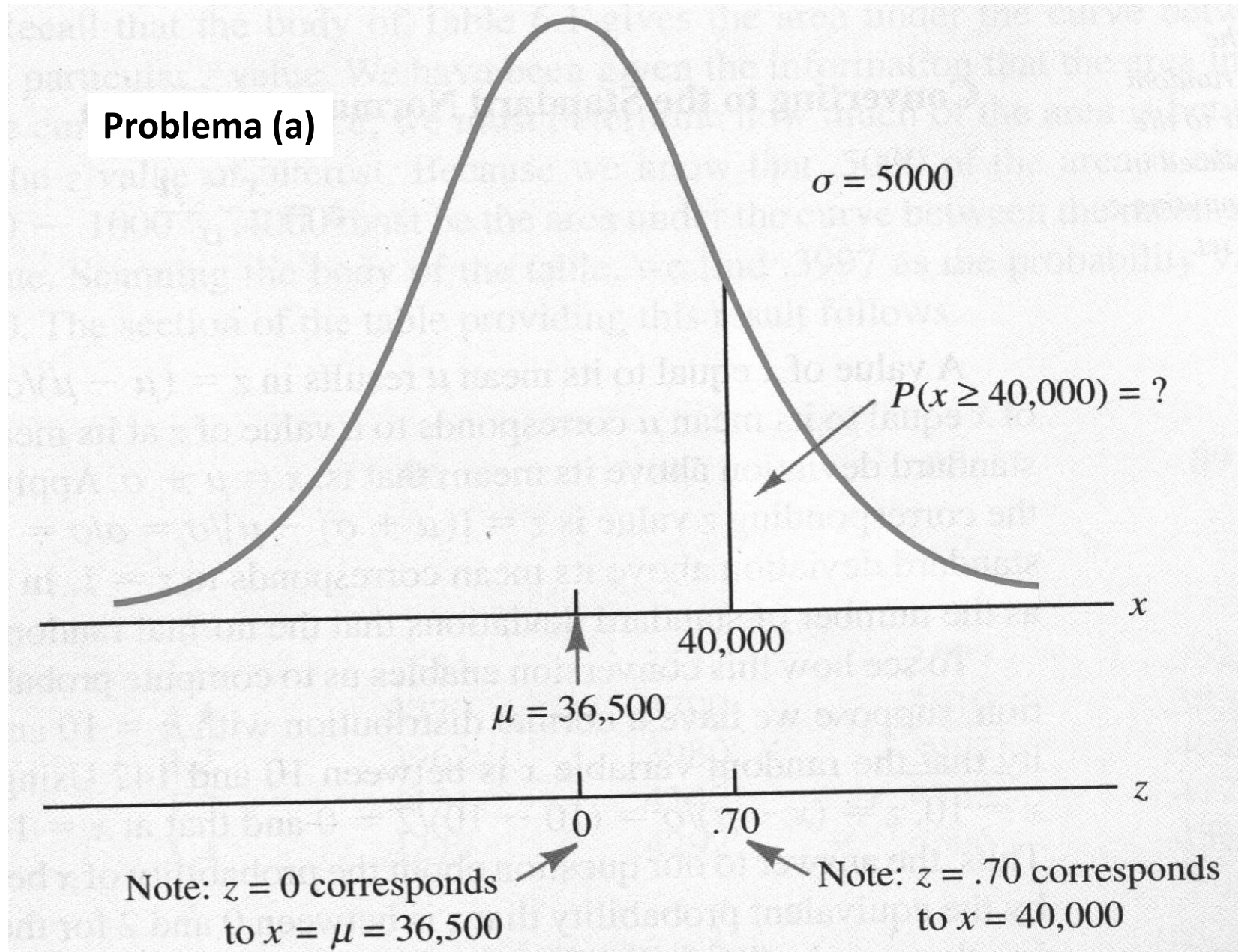
Exemplo

- Exemplo: Grear Tire Company
 - A fabricante Grear Tire Company desenvolveu um novo pneu radial que será vendido em uma cadeia de lojas de desconto
 - Por ser um novo produto, a companhia acredita que a garantia de quilometragem oferecida com o produto será um fator importante de aceitação
 - A cláusula de garantia prevê um desconto na troca caso um pneu vendido não dure uma certa quilometragem mínima garantida
 - Para planejar a política de garantia, deseja-se obter informação sobre a quilometragem que o pneu deve rodar
 - Testes preliminares com uma amostra do novo pneu indicaram que a duração X (em Km) tem uma média $\mu = 36.500$ Km e um desvio padrão $\sigma = 5.000$ Km
 - Adicionalmente, os dados coletados indicaram que a distribuição normal é uma assunção razoável

Exemplo

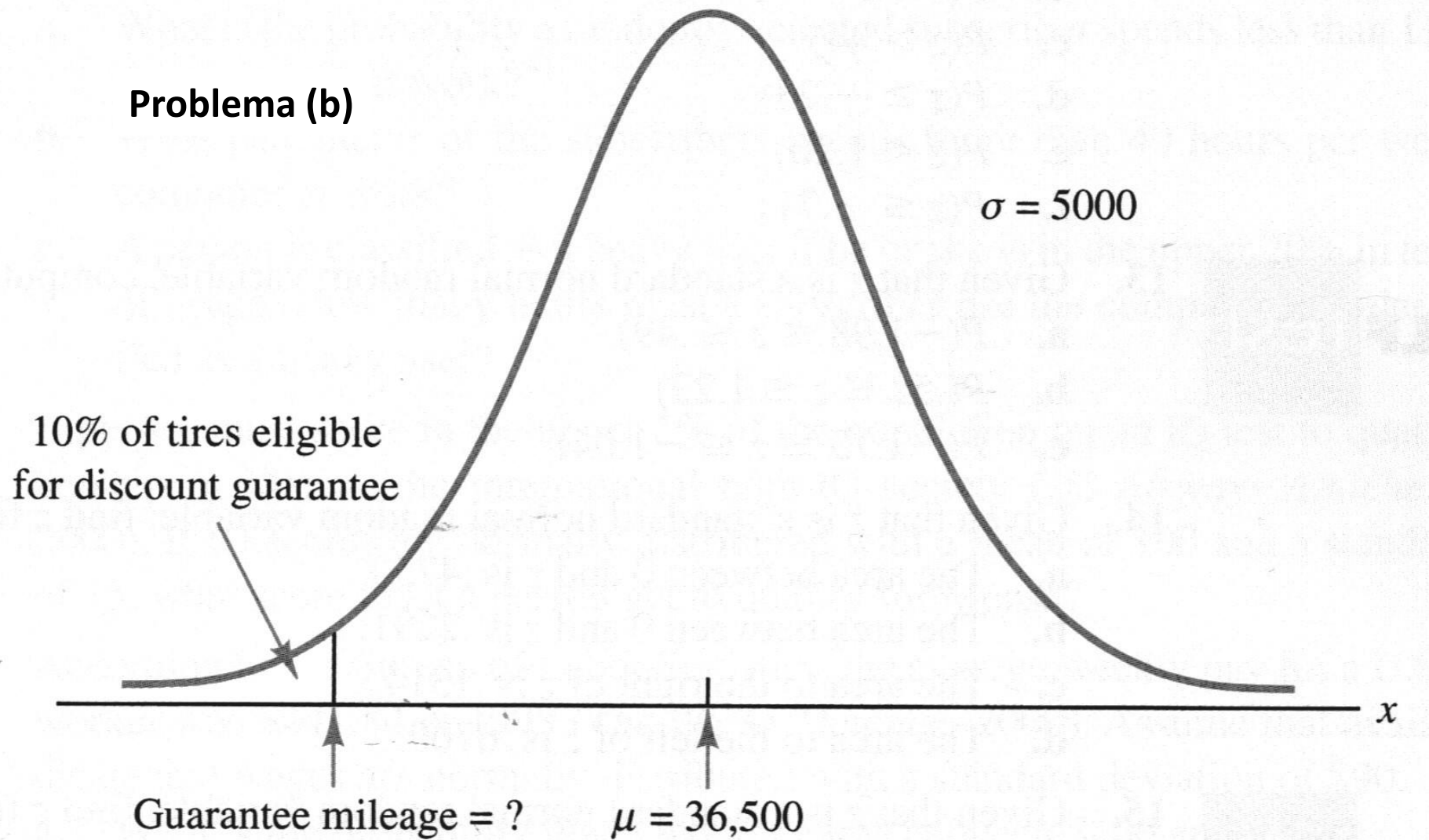
- Exemplo: Grear Tire Company
 - a) Considerando que uma das peças publicitárias do novo pneu pretende anunciar que o produto poderá durar 40 mil km (o que seria um bom apelo de vendas), qual a probabilidade de um pneu vendido chegar de fato a essa quilometragem?
 - b) Qual deve ser o valor de quilometragem garantida de modo que no máximo 10% das unidades vendidas sejam elegíveis ao desconto?
- A questão (a) pode ser respondida analisando a distribuição de distribuição acumulada, F
- A questão (b) pode ser respondida através da função quantil (ou função inversa) F^{-1} da distribuição normal

Exemplo



Exemplo

Problema (b)



Exemplo

- Exemplo: Great Tire Company

a) Considerando que uma das peças publicitárias do novo pneu pretende anunciar que o produto poderá durar 40 mil km (o que seria um bom apelo de vendas), qual a probabilidade de um pneu vendido chegar de fato a essa quilometragem?

- Queremos calcular

$$\Pr(X \geq 40000) = 1 - \Pr(X < 40000) = 1 - F(40000)$$

- No Excel, basta usar a fórmula

$$=1-DIST.NORM.N(40000,36500,5000,VERDADEIRO)$$

o que resulta em aproximadamente 0.242 = 24.2%

- Para o cálculo manual, devemos padronizar X,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{40000 - 36500}{5000} = 0.7$$

Pela Tabela III, sabemos que $\Pr(0 < z < 0.7) = 0.258$ e portanto

$F(0.7) = \Pr(-\infty < z < 0.7) = 0.758$; como estamos interessados na área à direita de 0.7, devemos subtrair $1 - 0.758 = 0.242 = 24.2\%$

Exemplo

- Exemplo: Grear Tire Company

- a) Qual deve ser o valor de quilometragem garantida de modo que no máximo 10% das unidades vendidas sejam elegíveis ao desconto?

- Nosso interesse é calcular $F^{-1}(p)$

- Em Excel, basta usar a fórmula

- =INV.NORM.N(0.1, 36500, 5000)

- o que resulta em 30092 km

- Para o cálculo manual:

- devemos observar que 40% da área deve estar entre a média e o valor da quilometragem de garantia;

- Procuramos pelo valor 0.4 na Tabela III e descobrimos que esta área está a aproximadamente 1.28 desvios padrões abaixo da média, ou seja, $z = -1.28$;

Exemplo

- Exemplo: Grear Tire Company

- a) Qual deve ser o valor de quilometragem garantida de modo que no máximo 10% das unidades vendidas sejam elegíveis ao desconto?

- Para o cálculo manual (cont):

- Para encontrar a quilometragem correspondente a $z = -1.28$, temos:

- $$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = -1.28 \Rightarrow x - \mu = -1.28\sigma \Rightarrow x = \mu - 1.28\sigma$$

- Com $\mu = 36.500$ e $\sigma = 5.000$, temos

- $$x = \mu - 1.28\sigma = 36500 - 1.28(5000) = 30100$$

- Assim, uma garantia de 30.100 km satisfaria o requisito de aproximadamente 10% dos pneus serem elegíveis para o desconto
 - Com base nessa informação, seria razoável que a empresa estabeleça uma quilometragem de garantia de 30.000 km.