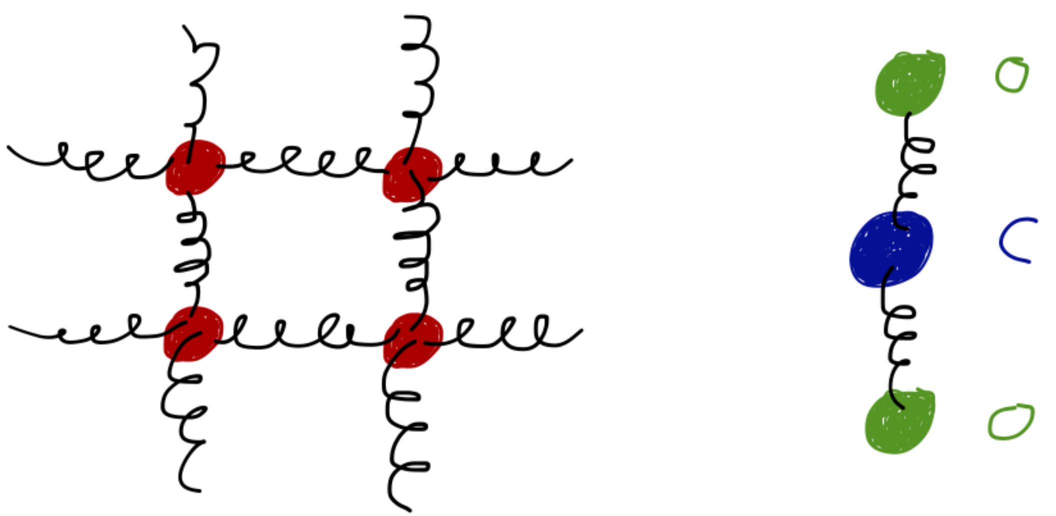
Oscilações em duas dimensões

Roberto Ortiz

Professor Livre-Docente
EACH – USP

Condições:

- A força resultante é decomposta em 2 direções perpendiculares
- O movimento do objeto depende das condições iniciais (posição e velocidade)
- Exemplos: átomos em uma rede cristalina, molas acopladas



- **Caso I**: a constante elástica *k* é igual nas 2 dimensões:

  Neste caso, a frequência angular de oscilação ω será a mesma, mas pode haver uma diferença de fase entre as oscilações nas direções x e y.

  Conforme já vimos, a solução da equação diferencial é uma combinação de senos e/ou cosenos. Escrevemos as equações na posição em 2 direções perpendiculares

$$x(t) = A \sin \omega t$$

$$y(t) = B \sin (\omega t + \delta)$$

  Onde δ é a diferença de fase nas direções x e y e *A* e *B* são as amplitudes do movimento, que podem ser iguais ou diferentes.

  A diferença de fase δ nas direções x e y vai depender das condições iniciais do sistema, tais como sua posição e/ou velocidade inicial.

Polarização linear

- Se os movimentos nas direções x e y estiverem em fase: $\delta = 0$

$$y = (B / A)\, x$$

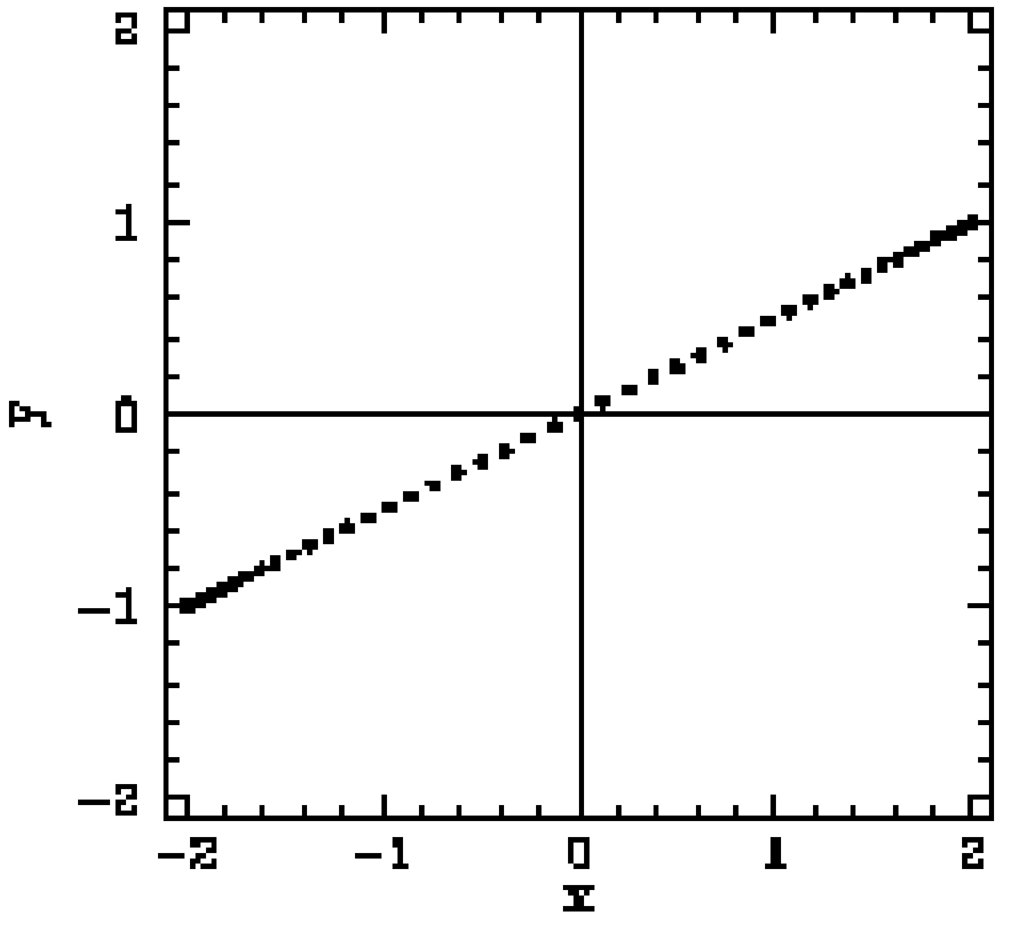
A equação acima é de uma reta que passa pela origem e de inclinação *B*/*A*.

- Se a diferença de fase for: $\delta = \pi$:

$$y(t) = B \sin(\omega t + \pi) = -B \sin(\omega t)$$

$$y = -(B / A)\, x$$

Exemplo: $A = 2$, $B = 1$, $\delta = 0$



Questão: como seria o movimento se $\delta = \pi$?

Polarização elíptica (ou circular)

- Quando $\delta = \pi/2$ os movimentos nas direções x e y estão em quadratura:

$$y(t) = B \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$y(t) = B [\sin(\omega t)\cos(\pi/2)+\sin(\pi/2)\cos(\omega t)]$$

$$y(t) = B \cos(\omega t)$$

Se combinarmos com a equação do movimento na direção x, teremos:

$(x/A)^2 = \sin^2(\omega t)$

$(y/B)^2 = \cos^2(\omega t)$

$(x/A)^2 + (y/B)^2 = \sin^2(\omega t)+\cos^2(\omega t) = 1$

Logo:

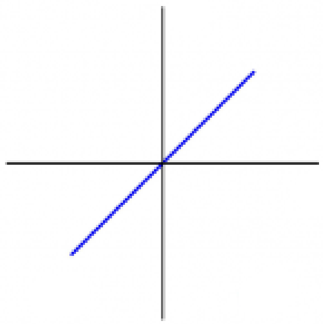
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

Esta é a equação da elipse, com centro na origem e semi-eixos A e B.

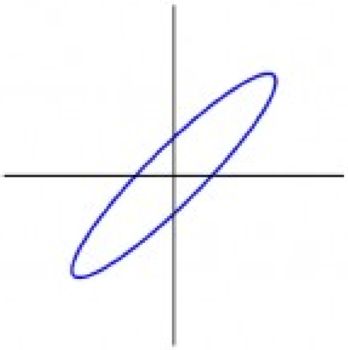
No caso em que $A = B$ temos a equação da circunferência e a polarização é **circular**.

O movimento harmônico para diversas diferenças de fase

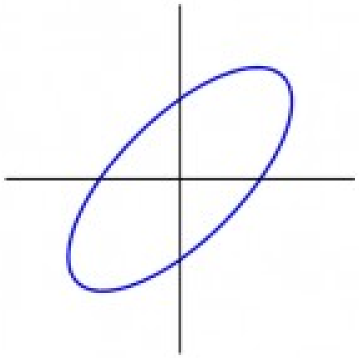
$x(t) = A \sin \omega t$
$y(t) = B \sin (\omega t + 0)$
Sentido: vai-e-vem



$x(t) = A \sin \omega t$
$y(t) = B \sin (\omega t + \pi/8)$



$x(t) = A \sin \omega t$
$y(t) = B \sin (\omega t + \pi/4)$

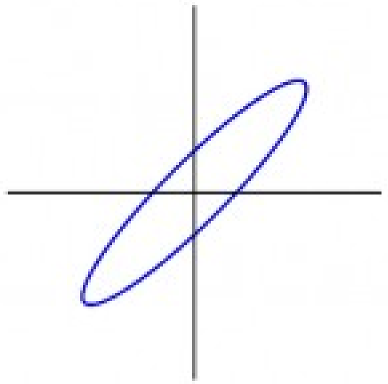


Examinemos o <u>sentido</u> do movimento:

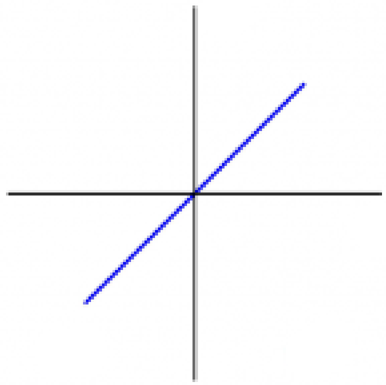
$x(t) = A \sin \omega t$

$y(t) = B \sin (\omega t + \delta)$

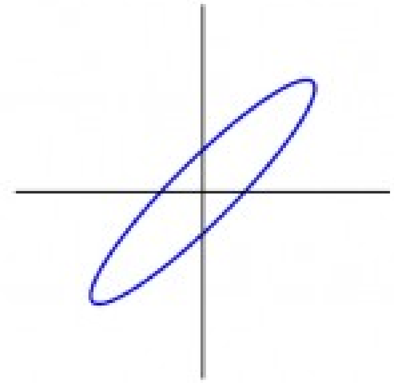
Suponhamos, por exemplo: $\delta = \pi/8$



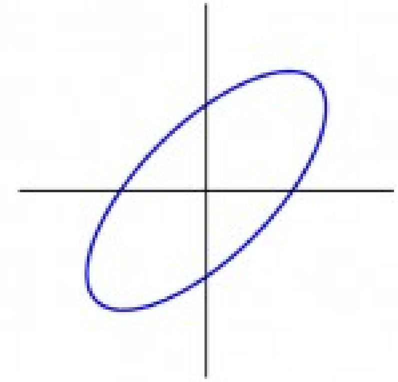
ωt	$x/A = \sin(\omega t)$	$y/B = \sin(\omega t + \pi/8)$
0	0	0,38
$\pi/8$	0,38	0,71
$\pi/4$	0,71	0,92
$3\pi/8$	0,92	1,00
$\pi/2$	1,00	0,92



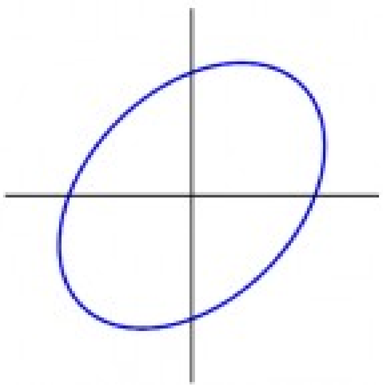
$\delta = 0$



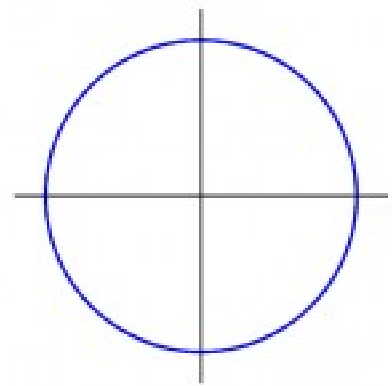
$\delta = \pi/8$



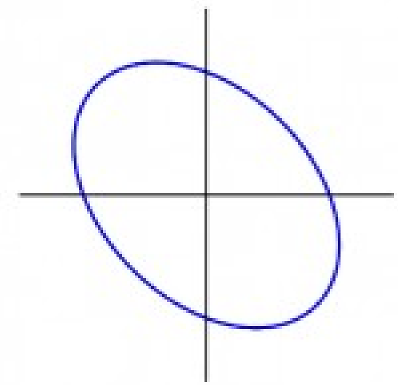
$\delta = \pi/4$



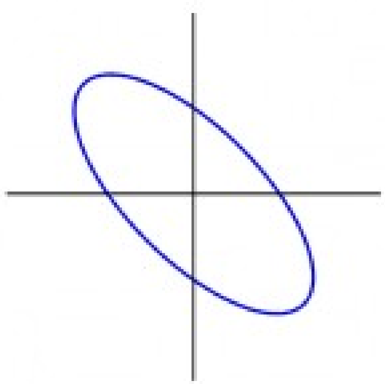
$\delta = 3\pi/8$



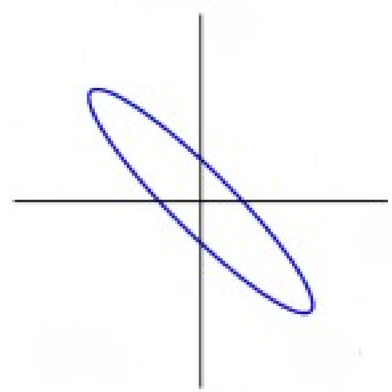
$\delta = \pi/2$



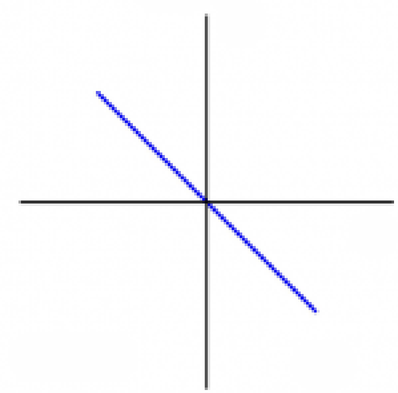
$\delta = 5\pi/8$



$\delta = 3\pi/4$



$\delta = 7\pi/8$



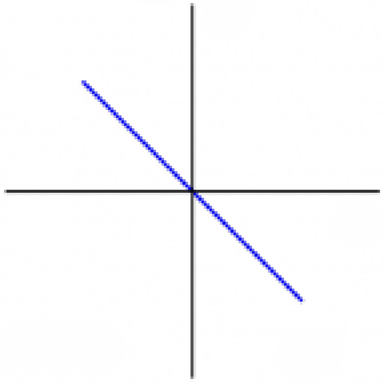
$\delta = \pi$

Se a diferença de fase for $0 < \delta < \pi$:

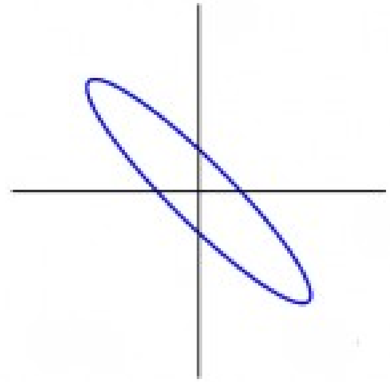
O corpo gira no sentido horário

Se a diferença de fase for $\pi < \delta < 2\pi$:

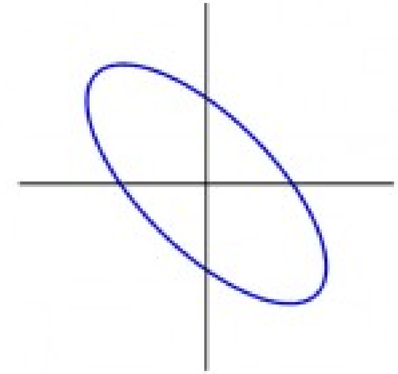
O corpo gira no sentido anti-horário



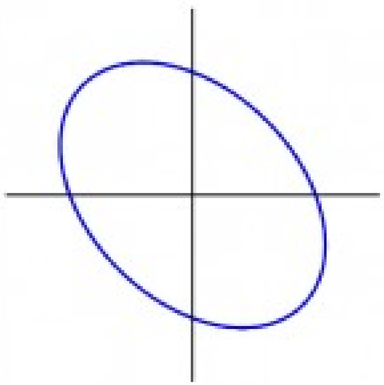
$\delta = \pi$



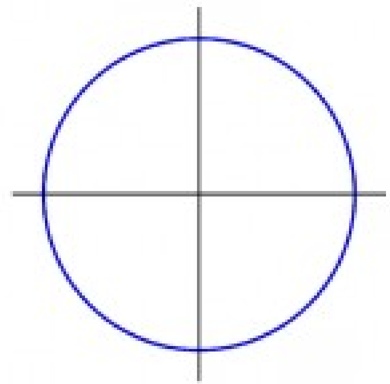
$\delta = 9\pi/8$



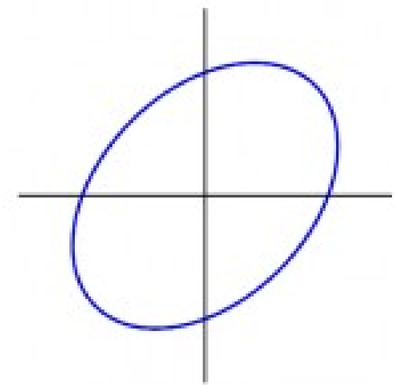
$\delta = 5\pi/4$



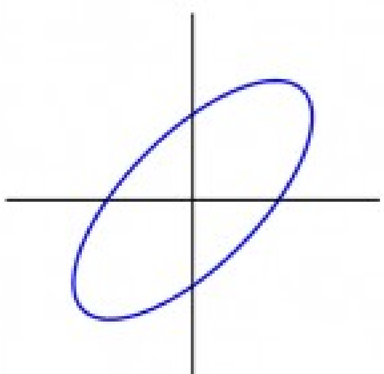
$\delta = 11\pi/8$



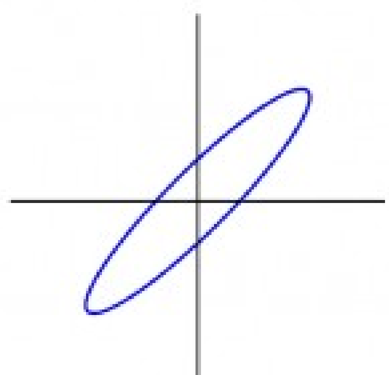
$\delta = 3\pi/2$



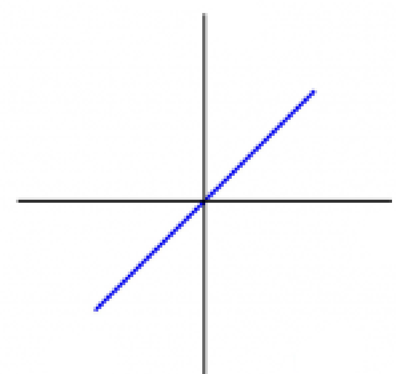
$\delta = 13\pi/8$



$\delta = 7\pi/4$



$\delta = 15\pi/8$



$\delta = 2\pi$

- **Caso II**: a constante elástica *k* é diferente nas 2 dimensões: k_1 e k_2.

  Neste caso, haverá duas frequências angulares de oscilação, uma para cada direção. O movimento dependerá do valor relativo de ω_1 e ω_2.

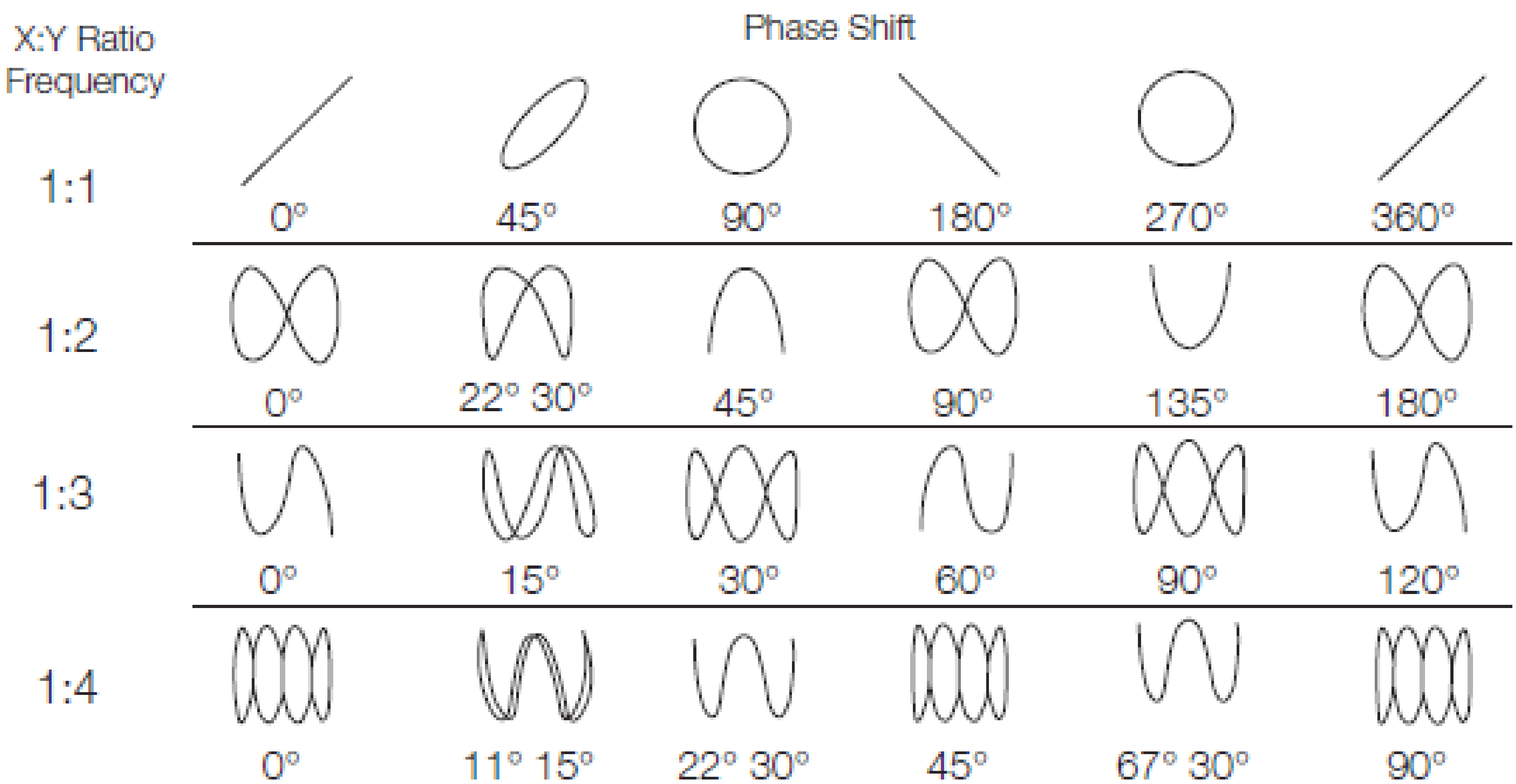
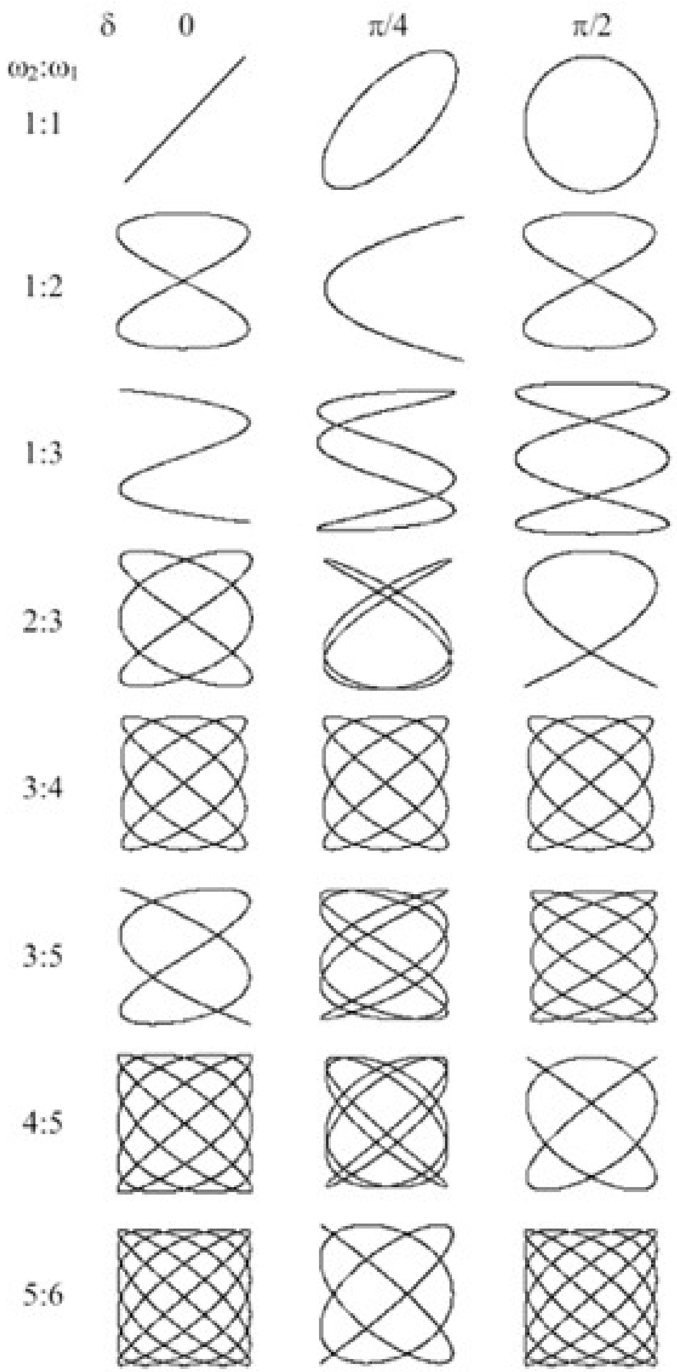


Figure 70. Lissajous patterns.



- Se a razão ω_1/ω_2 não for um número racional então a figura não "se fecha".
- Diferentes razões de amplitudes A_1/A_2 apenas esticarão as figuras na direção x ou y.

Fim