Astronomia para o Ensino de Ciências (ACH-4116)
1ª. lista de exercícios

Roberto Ortiz – Professor Livre-Docente
EACH/USP

Se precisar, utilize: constante de Planck h = 6,626075 x 10^{-34} J.s = 4,13567 x 10^{-15} eV.s; velocidade da luz c = 2,998 x 10^{8} m/s; constante de Stefan-Boltzmann σ = 5,67 x 10^{-9} (S.I.) ou 5,67 x 10^{-5} (CGS); T_{sol} = 5780 K. Para os dados sobre os níveis atômicos, consulte os slides da aula sobre "Luz e Radiação".

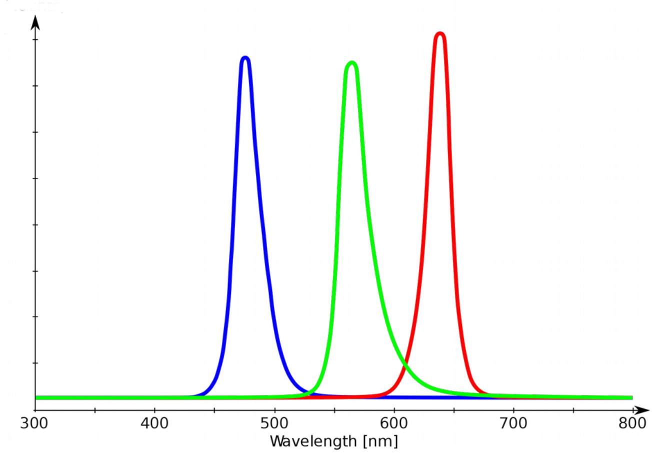
1-) A rádio *Kiss-FM* opera na frequência de 102,1 MHz. Calcule o comprimento de onda em metros e em centímetros.

2-) A cor verde do espectro eletromagnético corresponde aproximadamente ao comprimento de onda de 500 nanometros. Converta-o para Angstroms, micron, centímetros e metros.

3-) Por que alguns materiais, quando queimados em um tubo de Bunsen, apresentam uma cor bem característica?

4-) Por que o espectro das estrelas é tipicamente de absorção?

5-) Pode-se criar uma fonte de fonte de luz branca utilizando-se um conjunto de três LEDs com as cores azul, verde e vermelha. A imagem abaixo ilustra o espectro de emissão de cada um deles. Se a potência de cada LED for de 1 mW, calcule o número de fótons emitido por segundo, por cada LED.



Fonte: Light-emitting diode (Wikipedia)

6-) Qual é a energia mínima que devemos ceder a um átomo de hidrogênio que se encontra no primeiro estado excitado, para que este seja ionizado? Qual deve ser o comprimento de onda máximo (em Angstroms) de um fóton capaz de ionizar esse átomo, nessas condições?

7-) Calcule o comprimento de onda, em nanometros, das 3 primeiras linhas da série de Lyman do hidrogênio (Ly-α, Ly-β e Ly-γ). Em que região do espectro eletromagnético elas se encontram?

8-) Um átomo possui os seguintes níveis de energia eletrônicos: nível fundamental, E_1=0 eV; primeiro nível excitado, E_2=0,5 eV; segundo nível excitado, E_3=1,5 eV. Calcule o comprimento de onda de todas as transições eletrônicas desse átomo, admitindo que todas sejam permitidas. Desenhe um espectro de emissão, em escala, assinalando as linhas espectrais e a região visível do espectro. Quais linhas são visíveis para o olho humano?

9-) Calcule a energia total irradiada em 1 segundo, por 1 cm^2 da superfície do Sol. Repita o procedimento para a pele de uma pessoa que esteja à temperatura de 37^{o}C.

10-) Uma estrela afasta-se de nós a uma velocidade de 100 km/s. Em laboratório, a linha Hα do hidrogênio (transição entre os níveis n = 2 e n = 3) corresponde ao comprimento de onda de 6563,0 A. **(a)** Em que comprimento de onda esta linha é observada no espectro dessa estrela? **(b)** Qual seria seu resultado se a estrela estivesse se aproximando de nós?

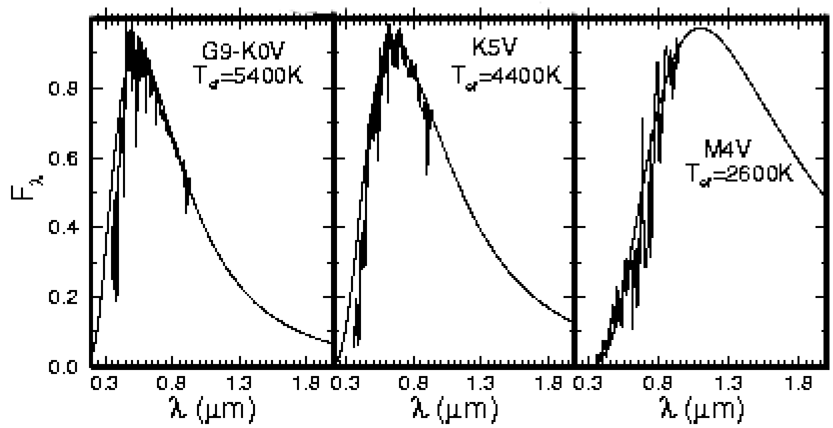
11-) A linha Hβ corresponde à transição do átomo de hidrogênio entre os níveis n = 2 e n = 4. Em laboratório esta linha é observada no comprimento de onda de 4861 A, porém em uma galáxia distante ela aparece deslocada em direção à parte vermelha do espectro, em 4888 A. Calcule a componente da velocidade dessa galáxia na direção do observador, também chamada de *velocidade radial*, em km/s. A galáxia está se aproximando ou se afastando?

12-) O cometa *Hyakutake* foi um dos mais brilhantes a aparecer no céu no final do século XX e foi o cometa mais brilhante de 1996. Podia ser visto a olho nu em locais distantes de iluminação e com pouca poluição atmosférica. Sua magnitude aparente atingiu m_v=+4.0 e sua cauda estendeu-se por um ângulo correspondente a 10 vezes o da Lua Cheia. Sabendo que a magnitude aparente visual da Lua Cheia é de m_v= –12.6, calcule quantas vezes o brilho do cometa era menor do que o da Lua Cheia.

13-) Considere uma estrela *A*, de temperatura T_A=10 000 K e magnitude aparente visual m_v=+3,0 e uma estrela *B*, de temperatura T_B=4000 K e magnitude aparente visual m_v=+4.0. Responda:

a) qual é a estrela visualmente mais brilhante?
b) qual é a razão entre o brilho visual das duas estrelas?
c) qual das duas estrelas irradia mais energia por centímetro quadrado em sua superfície?
d) se medirmos o fluxo de radiação emitido pelas duas estrelas, integrado em todos os comprimentos de onda (em W/m^2), qual deles apresentará o maior valor?
e) Faça um esboço do espectro dessas duas estrelas. Ignore as linhas de absorção.

14-) A figura abaixo ilustra 3 espectros estelares. Calcule a temperatura das 3 estrelas, utilizando a Lei de Wien.



15-) A distância média entre Júpiter e o Sol é de 5,2 U.A. Utilizando a definição, calcule essa distância: **(a)** em parsecs; **(b)** em anos-luz. **(c)** Utilizando esses resultados, calcule quantos minutos a luz tarda para atingir Júpiter, partindo do Sol.

16-) A estrela α Centauri tem paralaxe p = 0,762". Calcule:
a) a paralaxe em graus.
b) o ângulo máximo (em segundos de arco) entre α Centauri e um suposto planeta dessa estrela, em órbita circular, a 2 U.A. de distância da estrela.

17-) A temperatura do Sol é de 5780 K. Sabendo-se que sua distância é de cerca de 150 milhões de quilômetros e que seu raio é de 7.0×10^{10} cm, calcule a potência incidente (em Watts) sobre 1 m^2 de área, na Terra. Compare com a potência de uma lâmpada: quantos metros quadrados de área coletora seriam necessários para aproveitar a energia solar para funcionar uma lâmpada de 100 W?

18-) Calcule o diâmetro (em diâmetros solares) da estrela Antares (α Scorpii), cuja magnitude aparente é de m_V=+1.09, paralaxe p=0.0059" e temperatura T=3500 K. Considere a magnitude aparente do Sol m_V = –26,73.

Respostas dos Exercícios

1-) $\lambda = c/\nu = 2{,}998 \times 10^8 / 102{,}1 \times 10^6 = 2{,}94$ m = 294 cm

2-) 500 nm = 500×10^{-9} m = 5×10^{-7} m = $5 \times 10^{-7} \times 10^2$ cm = 5×10^{-5} cm = $5 \times 10^{-5} \times 10^8$ A = 5000 A
500×10^{-9} m = $500 \times 10^{-9} \times 10^6$ μm = 500×10^{-3} μm = 5×10^{-1} μm = 0,5 μm.

3-) Cada material tem seu conjunto de linhas de emissão próprio, dependendo dos elementos químicos que o compõem. As linhas de emissão mais intensas definirão a cor da chama.

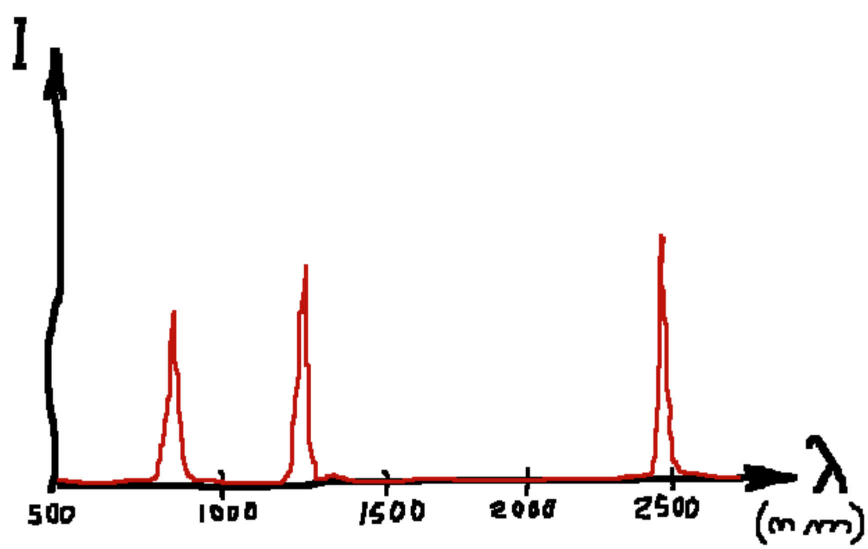
4-) A temperatura da fotosfera, camada mais brilhante da estrela, diminui de dentro para fora. Logo, aplica-se a terceira lei de Kirchoff.

5-) A partir do gráfico pode-se obter o comprimento de onda aproximado da luz emitida por cada LED: 475 nm, 565 nm e 635 nm (assume-se a aproximação que a luz emitida por cada um deles é monocromática). A potência emitida é dada pelo número de fótons emitidos por segundo (N), multiplicado pela energia de cada fóton (E): $P = N \times E = N \times (hc/\lambda)$. Logo, $N = P\lambda/hc$. Para o LED "azul" temos: $N = (1 \times 10^{-3} \times 475 \times 10^{-9})/ (6{,}626075 \times 10^{-34} \times 2{,}998 \times 10^{8}) = 2{,}4 \times 10^{15}$ fótons/s. Repete-se o procedimento para os outros dois LEDs.

6-) O primeiro estado excitado do hidrogênio está 10,19 eV acima do estado fundamental e (13,6-10,19) eV abaixo da energia necessária para sua ionização. Logo, a energia mínima necessária para ionizar um átomo nestas condições é: $\Delta E = 13{,}6 - 10{,}19 = 3{,}41$ eV. O fóton necessário para ionizar este átomo deverá ter comprimento de onda máximo correspondente a $\Delta E = hc/\lambda_{max} \rightarrow \lambda_{max} = hc/\Delta E = 4{,}13567 \times 10^{-15} \times 2{,}998 \times 10^{8}/3{,}41 = 3{,}636 \times 10^{-7}$ m $= 3{,}636 \times 10^{-7} \times 10^{10}$ A = 3636 A.

7-) A linha Lyman-α corresponde à transição entre os níveis fundamental e primeiro estado excitado do hidrogênio. Sua energia corresponde à diferença de energia entre esses dois níveis, i.e. $\Delta E = 10{,}19 - 0 = 10{,}19$ eV. Analogamente, os fótons da linha Lyman-β têm energia 12,07 eV e os da linha Lyman-γ têm energia 12,73 eV. O comprimento de onda destes fótons é relacionado com sua energia pela expressão: $\Delta E = hc/\lambda \rightarrow \lambda = hc/\Delta E$. Substituindo os valores de energia desses fótons, temos que $\lambda_{Ly\alpha} = 4{,}13567 \times 10^{-15} \times 2{,}998 \times 10^{8}/10{,}19 = 1{,}217 \times 10^{-7}$ m = 1217 A; $\lambda_{Ly\beta} = 4{,}13567 \times 10^{-15} \times 2{,}998 \times 10^{8}/12{,}07 = 1027$ A; $\lambda_{Ly\gamma} = 4{,}13567 \times 10^{-15} \times 2{,}998 \times 10^{8}/12{,}73 = 974$ A. Estas três linhas encontram-se na região ultravioleta do espectro.

8-) Conforme os exercícios anteriores, o comprimento de onda dos fótons emitidos e/ou absorvidos por cada transição é $\lambda = hc/\Delta E$, onde ΔE é a diferença de energia entre os níveis envolvidos na transição eletrônica. Chamemos os níveis de energia de 1, 2 e 3, em ordem crescente de energia. A transição entre os níveis 1 e 2 emite/absorve fótons com $\lambda_{12} = 4{,}13567 \times 10^{-15} \times 2{,}998 \times 10^{8}/0{,}5 =$ **2480 nm**. A transição entre os níveis 2 e 3 emite/absorve fótons com $\lambda_{23} = 4{,}13567 \times 10^{-15} \times 2{,}998 \times 10^{8}/(1{,}5 - 0{,}5) =$ **1240 nm**. A transição entre os níveis 1 e 3 emite/absorve fótons com $\lambda_{13} = 4{,}13567 \times 10^{-15} \times 2{,}998 \times 10^{8}/(1{,}5 - 0) =$ **826 nm**. O espectro visível vai de 400 nm até aproximadamente 750 nm. Logo, as três linhas espectrais estão na região infravermelha e portanto não são visíveis ao olho humano.



9-) Utiliza-se a Lei de Stefan: $B(T) = \sigma T^4$. No sistema CGS e utilizando a temperatura do Sol de 5780 K, temos: $B(5780K) = 5,67 \times 10^{-5} \times 5780^4 = 6,3 \times 10^{10}$ erg $s^{-1}cm^{-2}$. Para a pele humana deve-se converter a temperatura para kelvin: $B(37^oC) = 5,67 \times 10^{-5} \times (37+273)^4 = 5,2 \times 10^5$ erg $s^{-1}cm^{-2}$.

10-) $\Delta\lambda / \lambda = v / c \rightarrow \Delta\lambda / 6563 = 100 / 2,998 \times 10^5 \rightarrow \Delta\lambda = 2,2$ A. **(a)** A fonte de radiação está se <u>afastando</u> do observador, logo o desvio Doppler é para o <u>vermelho</u>, i.e. o comprimento de onda <u>aumenta</u>, então $\lambda = 6563 + 2,2$ A $= 6565,2$ A. **(b)** Se a estrela estivesse se <u>aproximando</u> do observador, então o desvio Doppler seria para o <u>azul</u>, i.e. o comprimento de onda <u>diminuiria</u>, então $\lambda = 6563,0 - 2,2 = 6560,8$ A.

11-) $\Delta\lambda / \lambda = v / c \rightarrow \Delta\lambda = | 4888 - 4861 | = 27$ A. Logo, a velocidade radial pode ser calculada: v = (Dl c) / l = $27 \times 2,998 \times 10^8 / 4861 = 1,665 \times 10^6$ m/s $= 1,665 \times 10^3$ km/s. O comprimento de onda observado aparece <u>maior</u> do que o de laboratório, indicando que o desvio é para o <u>vermelho</u>. Portanto a galáxia está se <u>afastando</u> do observador.

12-) Utiliza-se a fórmula que compara o brilho de duas estrelas para comparar o brilho do cometa (*C*) com o da Lua Cheia (*L*): $m_C - m_L = -2,5 \log (b_C / b_L) = +4,0 - (-12,6) = -2,5 \log (b_C / b_L) \rightarrow \log (b_C / b_L) = -6,64 \rightarrow (b_C / b_L) = 10^{-6,64} = 1/(4,4$ milhões), i.e. o cometa era 4,4 milhões de vezes menos brilhante do que a Lua Cheia (não importando o seu tamanho aparente).

13-) **(a)** a estrela mais brilhante é aquela com <u>menor</u> magnitude visual, i.e. a estrela *A*; **(b)** $m_A - m_B = -2,5 \log (F_A/F_B) \rightarrow F_A/F_B = 10^{-0,4(mA-mB)} = 10^{-0,4(3,0 - 4,0)} = 10^{+0,4} = 2,51$, i.e. a estrela *A* é 2,51 vezes mais brilhante que a estrela *B*; **(c)** segundo a lei de Stefan, é a estrela que possui a <u>maior</u> temperatura, i.e. a estrela *A*; **(d)** deve-se aplicar a correção bolométrica $m_{bol,A} = 3,0 - 0,4 = +2,6$ e $m_{bol,B} = 4,0 - 1,1 = +2,9$, logo a estrela *A*, que possui a <u>menor</u> magnitude bolométrica, emite o <u>maior</u> fluxo total; **(e)** segundo a lei de Wien, o espectro da estrela *A* tem pico em $\lambda = 0,29 / 10\ 000 = 0,000029$ cm $= 2900$ A e analogamente a estrela *B* tem pico em 7250 A.

14-) A partir do gráfico obtém-se o comprimento de onda onde a emissão é máxima. Para a estrela G9-K0v o máximo do espectro está em 0,5 μm, aproximadamente. Utilizando-se a lei de Wien com o comprimento de onda em centímetros, obtemos: $\lambda_{max} T = 0,29$ cm K $\rightarrow T = 0,29/(0,5 \times 10^{-4}) = 5800$ K, que é próximo ao valor de temperatura que consta na figura (5400 K). Analogamente calcula-se a temperatura para as outras estrelas.

15-) **(a)** Por definição temos que 1 parsec = 206 265 U.A., logo a distância de Júpiter ao Sol equivale a 5,2/206 265 = 0,000025 parsec. **(b)** Ainda por definição, 1 ano-luz equivale a 3,26 parsecs, logo essa distância equivale a 0,000082 anos-luz. **(c)** 1 ano = 365,25 dias = 365,25 x 24h = 365,25 x 24 x 60 min = 525 960 min. Logo 1 ano-luz equivale a 525 960 minutos-luz e então segue que Júpiter dista do Sol 0,000082 x 525 960 = 43 minutos-luz. Pode-se dizer que a luz leva 43 minutos para atingir Júpiter, a partir do Sol.

16-) **(a)** Utilizam-se os conhecimentos de geometria do Ensino Médio. 0,762'' = 0,762/(60 x 60) = 0,000212º. **(b)** Utiliza-se o conceito de ângulo em radianos do Ensino Médio, adotando como arco da circunferência a distância entre a estrela e o planeta e o raio da circunferência igual à distância da estrela. O ângulo θ (em radianos) entre a estrela e o suposto planeta será de $\theta = 2$ U.A./ $d_{\alpha Cen} = 2$ / (206

265 / *p*) = 2 / (206 265 / 0,762) = 1,524 / 206 265. Note que até aqui temos trabalhado com todas as unidades em unidades astronômicas (U.A.). Para transformar o ângulo θ em segundos de arco basta multiplicar pelo número de segundos de arco em 1 radiano, que pode ser obtido a partir da relação: π rad = 180º = 180 x 60' = 180 x 60 x 60''. Daí, chega-se a 1 rad = 206 265''. Aplicando-se esta relação à resposta anterior, obtemos: θ = (1,524 / 206 265) x 206 265 = 1,524''.

17-) Comparamos o fluxo emitido por 1 m^2 na superfície do Sol com o fluxo incidente na superfície da Terra, utilizando o fato de que o fluxo cai com o quadrado da distância. Na superfície do Sol, o fluxo emitido por 1m^2 de área é $\sigma T^4 = 5{,}67 \times 10^{-9} \times 5780^4 = 6{,}33 \times 10^6$ W/m^2. O fluxo incidente sobre 1 metro quadrado da superfície terrestre (ignorando a absorção atmosférica) é portanto: $6{,}33 \times 10^6 (R_{sol}/1\ U.A.)^2 = 6{,}33 \times 10^6 \times (7 \times 10^{10}/1{,}5 \times 10^{13})^2 = 138$ W. Para fazermos funcionar uma lâmpada de 100 W precisaríamos coletar radiação solar sobre uma superfície de 100/138 m^2 = 0,72 m^2.

18-) Inicialmente calculamos as magnitudes bolométricas de Antares e do Sol, para comparação: $m_{bol,Ant} = +1{,}09 - 2{,}05 = -0{,}96$ e $m_{bol,Sol} = -26{,}73 - 0{,}35 = -27{,}08$. Em seguida, comparamos o fluxo bolométrico de Antares com o Sol: $m_{bol,Ant} - m_{bol,Sol} = -2{,}5 \log (F_{Ant}/F_{sol}) = -0{,}96 - (-27{,}08) = 26{,}12$. Logo, $(F_{Ant}/F_{sol}) = 10^{-10{,}45} = 3{,}56 \times 10^{-11}$. Vamos calcular a razão entre a distância dessas duas estrelas: d_{Sol} = 1/206 265 parsec = $4{,}85 \times 10^{-6}$ parsec; dAnt = 1 / 0,0059 = 169 parsecs. Utilizamos a expressão que relaciona a luminosidade, fluxo e distância: $L_{Ant}/L_{sol} = (F_{Ant}/F_{sol})\ (d_{Ant}/d_{Sol})2 = 3{,}56 \times 10^{-11} \times (169/4{,}85 \times 10^{-6})^2 = 4{,}35 \times 10^4$. Finalmente, utilizamos a expressão que relaciona a luminosidade com a temperatura e o raio estelar: $L_{Ant}/L_{sol} = (R_{Ant}/R_{sol})^2\ (T_{Ant}/T_{sol})^4 \rightarrow (R_{Ant}/R_{sol})^2 = 4{,}35 \times 10^4 \times (5780/3500)^4 = 3{,}24 \times 10^5 \rightarrow R_{Ant} = 569\ R_{sol}$.