

Astronomia para o Ensino de Ciências (ACH-4116)

3ª lista de exercícios

*Roberto Ortiz – Professor Livre-Docente
EACH/USP*

Se precisar, utilize: constante da gravitação universal $G = 6,67 \times 10^{-11}$ (S.I.); constante de Planck $h = 6,626075 \times 10^{-34}$ J.s = $4,13567 \times 10^{-15}$ eV.s; velocidade da luz $c = 2,998 \times 10^8$ m/s; massa do elétron $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg; carga do elétron $e = -1,60 \times 10^{-19}$ C; constante de Stefan-Boltzmann $\sigma = 5,67 \times 10^{-9}$ (S.I.) ou $5,67 \times 10^{-5}$ (CGS); 1 u.m.a. = $1,66 \times 10^{-27}$ kg; permissividade elétrica do vácuo $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$; $T_{sol} = 5780$ K; massa do Sol = $2,0 \times 10^{30}$ kg; raio do Sol $R_{sol} = 7,0 \times 10^8$ m; 1 parsec = $3,08 \times 10^{16}$ m. Para os dados sobre os níveis atômicos, consulte os slides da aula sobre “Luz e Radiação”.

1-) A luminosidade do Sol é de $3,8 \times 10^{26}$ W. Sabendo-se que cada sequência de reações $4p^+ \rightarrow {}^4\text{He}$ geram $3,6 \times 10^{12}$ Joule, calcule quantos átomos de ${}^4\text{He}$ são formados no Sol a cada segundo.

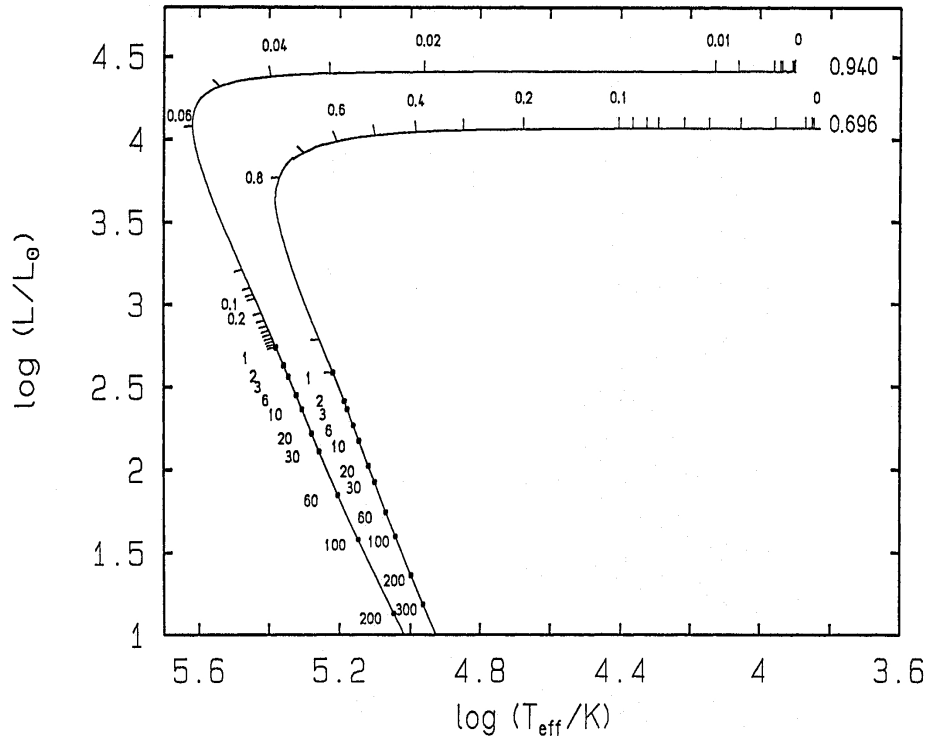
2-) Estima-se que 10% da massa do Sol será utilizada para produzir sua luminosidade. A massa do Sol é de 2×10^{30} kg. Utilizando o resultado que você obteve no exercício anterior, calcule quanto tempo será necessário para que 10% da massa do Sol (suponha toda ela em hidrogênio) seja convertida em ${}^4\text{He}$. Converta seu resultado em anos para saber o tempo de permanência do Sol na sequência principal.

3-) Segundo a Física Clássica, para que um próton colida com outro próton, é necessário que eles se aproximem a uma distância equivalente ao seu “diâmetro”, isto é: $1,8 \times 10^{-15}$ m. Pode-se calcular a velocidade que se deve lançar um próton contra outro próton em repouso de modo que essa distância possa ser atingida, apesar da força de repulsão eletrostática. A energia potencial elétrica de dois prótons separados por uma distância r é $U = (1/4\pi\epsilon_0)e^2/r$, onde e é a carga do próton (igual em módulo à carga do elétron = $1,6 \times 10^{-19}$ C). Utilize a lei da conservação da energia mecânica para obter a velocidade mínima para que haja a colisão de dois prótons.

4-) O Sol, como qualquer estrela, formou-se a partir da contração de uma nuvem molecular devido à ação de sua própria gravidade. Suponha que a nuvem progenitora do Sol tenha sido formada de hidrogênio puro, sob a forma molecular (isto é, H_2). Supondo-se ainda que a nuvem era esférica e de densidade constante, qual teria sido o seu raio original, se sua densidade era de 10^{10} moléculas/m³? Converta seu resultado para parsecs.

5-) Calcule a aceleração da gravidade na fotosfera solar tal como ela é hoje. Em seguida repita o cálculo supondo que o diâmetro solar irá tornar-se 100 vezes maior quando o Sol estiver no ramo assintótico das gigantes.

6-) A figura abaixo ilustra a trajetória evolutiva de duas estrelas no diagrama Hertzsprung-Russell, após elas deixarem o ramo assintótico das gigantes. Uma delas tem massa de 0,696 e a outra tem 0,940 massas solares. Calcule o diâmetro de ambas as estrelas quando sua temperatura é de 10 000 K e repita o cálculo para quando sua temperatura aumentar para 100 000 K. Como você explica essa mudança?



7-) Calcule a densidade de *Sirius B*, a anã-branca companheira de *Sirius A*. Dados: $R = 0,008 R_{\text{sol}}$; $M = 1,0 M_{\text{sol}}$. Compare seu resultado com a densidade da água ($1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$) e com a densidade média do Sol ($1,4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$).

8-) Por que o ciclo CNO não ocorre em estrelas com massa similar à do Sol?

9-) Por que no Universo os elementos de número atômico par geralmente são mais abundantes do que aqueles de número atômico ímpar?

10-) A supernova Shelton explodiu no ano 1987 em uma galáxia vizinha à Via-Láctea, situada relativamente próxima, a “apenas” 50 kpc de distância. Apesar disso, ela foi vista a olho nu, exibindo uma magnitude visual moderada, $m_v = 3,5$. Qual teria sido a sua magnitude visual se ela estivesse dentro da Via Láctea, a uma distância de 1 kpc? Compare seu resultado com a magnitude aparente do planeta Vênus ($m_{\text{venus}} = -4,5$).

11-) Suponha o átomo $^{24}\text{Mg}_{12}$. Qual é o elemento formado por meio da captura de 1 nêutron por esse núcleo? Descreva as etapas da sequência de reações nucleares.

12-) O que é o “decaimento beta” de um núcleo?

13-) O elemento *fósforo* deve se formar (mais provavelmente) a partir de qual elemento químico no interior de uma estrela?

14-) Calcule a densidade de uma estrela de nêutrons típica, com 2 massas solares e raio de 10 km.

15-) Calcule a velocidade com que gira um ponto situado no “equador” de um pulsar com raio de 10 km e frequência de 100 Hz. Compare o seu resultado com a velocidade da luz.

Respostas dos Exercícios

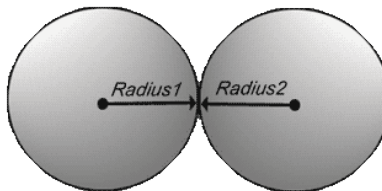
1-) $L_{\text{sol}} = \text{Energia/s} = 3,8 \times 10^{26} \text{ Joule/s}$. A energia gerada em cada segundo é $N \times 3,6 \times 10^{-12} \text{ J}$, onde N é o número de reações por segundo, logo $N = 3,8 \times 10^{26} / 3,6 \times 10^{-12} = 1,06 \times 10^{38}$ sequências de reações/s. Como cada reação leva à formação de 1 átomo de ${}^4\text{He}$, esta é também a taxa de formação deste elemento no Sol.

2-) A massa de cada átomo de ${}^4\text{He}$ é 4 u.m.a. Se t for o tempo necessário para gerar 1/10 da massa do Sol, temos: $t \times (1,06 \times 10^{38}) \times 4 \times (1,66 \times 10^{-27}) = 2 \times 10^{29} \text{ kg}$, onde $1,06 \times 10^{38}$ é o número de átomos de ${}^4\text{He}$ formados a cada segundo e t é expresso em segundos. Obtemos $t = 2,84 \times 10^{17} \text{ s} = 9 \times 10^9 \text{ anos}$.

3-) A energia mecânica é $E = (E \text{ potencial}) + (E \text{ cinética}) = (1/4\pi\epsilon_0)e^2/r + \frac{1}{2} m_p V_p^2$. A uma distância infinita (de onde um dos prótons é lançado) a energia potencial é zero, logo a energia mecânica no infinito é $\frac{1}{2} m_p V_p^2$. Na iminência da colisão a energia cinética é zero pois o próton pára. Temos portanto, igualando a energia mecânica “no infinito” à energia mecânica na iminência da colisão:

$$0 + \frac{1}{2} m_p V_p^2 = (1/4\pi\epsilon_0)e^2/D + 0$$

onde $D = 2 \times \text{raio}$ é a distância entre os dois prótons (de centro a centro), igual ao seu diâmetro na ocasião da colisão.



Isolando V_p nesta última equação obtemos: $V_p = e / \text{sqrt}(2 \pi \epsilon_0 m_p D)$. Substituindo os dados (veja no cabeçalho da pág. 1 desta lista) vem: $V_p = 1,2 \times 10^7 \text{ m/s} = 4\% \text{ da velocidade da luz}$.

4-) Supondo-se que a massa da nuvem original foi toda utilizada para formar o Sol, temos que a densidade da nuvem original era $\rho = M_{\text{sol}}/V_{\text{nuvem}}$. A densidade ρ (em kg/m^3) é dada por N (moléculas/ m^3) x massa de H_2 . A massa de cada molécula é igual a duas u.m.a., aproximadamente. O volume da esfera de raio R é $V_{\text{nuvem}} = (4/3) \pi R^3$. Logo, temos que $(4/3) \pi R^3 = M_{\text{sol}} / \rho$. Isolando o raio da nuvem e expressando a densidade em função da massa de H_2 , obtemos finalmente:

$$R^3 = (3 M_{\text{sol}}) / (8 \pi 1 \text{ u.m.a. } N)$$

Substituindo os valores na expressão acima obtemos $R = 2,43 \times 10^{15} \text{ m} = 0,08 \text{ parsec}$.

5-) $g = G M_{\text{sol}} / R^2$. Substituindo os valores (veja no cabeçalho desta lista): $g = 6,67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30} / (7 \times 10^8)^2 = 272 \text{ m/s}^2$. Se o raio aumentar 100 vezes então a gravidade diminuirá 10 000 vezes (pois é inversamente proporcional ao raio ao quadrado), logo: $g = 0,0272 \text{ m/s}^2$.

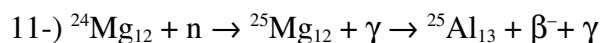
6-) Utilizamos a expressão: $L/L_{\text{sol}} = (R/R_{\text{sol}})^2 (T / 5780)^4$. Para a estrela de 0,940 massa solar extraímos do gráfico sua luminosidade, que se mantém constante no período considerado: $\log(L_{0,94}) = 4,4 \rightarrow L_{0,94} = 2,5 \times 10^4 L_{\text{sol}}$. Essa estrela terá um raio de 53 raios solares quando tiver uma temperatura de 10 000 K e apenas 0,53 raio solar quando sua temperatura atingir 100 000 K. De semelhante mesmo modo, a estrela de 0,696 massas solares tem $\log(L_{0,696}) = 4,1 \rightarrow L_{0,696} = 1,26 \times 10^4 L_{\text{sol}}$. Essa estrela terá um raio de 37,5 raios solares a 10 000 K e apenas 0,375 raio solar quando sua temperatura for de 100 000 K. Ao evoluir do ramo assintótico das gigantes vermelhas rumo à fase de núcleo da nebulosa planetária, a estrela lança para o espaço sua atmosfera, restando um volume (e raio) cada vez menor ao longo dessa evolução.

7-) $\rho = M / ((4/3) \pi R^3) = 2 \times 10^{30} / ((4/3) \pi (0,008 \times 7 \times 10^8)^3) = 2,7 \times 10^9 \text{ kg/m}^3$, que equivale a uma densidade $2,7 \times 10^6$ vezes maior que a densidade da água.

8-) Porque a temperatura do núcleo do Sol não é alta o suficiente para que colisões entre prótons e núcleos mais pesados ocorra. A repulsão eletrostática entre C e p^+ , N e p^+ ou O e p^+ é muito mais forte do que entre dois prótons, o que faz necessário que a velocidade relativa dessas partículas seja muito maior quando comparada àquela encontrada no interior do Sol.

9-) Porque os elementos de número atômico par são formados por reações alfa, captura de nêutrons, etc. enquanto os elementos de número atômico ímpar geralmente são formados por capturas de nêutrons.

10-) O fluxo cai com o quadrado da distância. Logo, se estivesse a uma distância 50 vezes menor ela teria exibido um fluxo $50^2 = 2500$ vezes maior. Transformamos essa relação em magnitudes: $m_1 - m_{50} = -2,5 \log (F_1/F_{50})$. Substituindo a razão de fluxos F_1/F_{50} , obtemos: $m_1 - 3,5 = -2,5 \log (2500) = -8,5$. Portanto $m_1 = 3,5 - 8,5 = -5,0$. A supernova apareceria ligeiramente mais brilhante do que o planeta Vênus (a “estrela d’Alva”).



12-) Em um núcleo relativamente instável um dos nêutrons pode converter-se em um próton com a emissão de um elétron (para a conservação da carga na reação).

13-) ${}^{30}\text{P}_{15}$ tem número atômico ímpar, logo é mais provável que ele se forme por meio de captura de nêutrons a partir do elemento com número atômico $15 - 1 = 14$ (Silício).

$$14-) \rho = M / V = 2 \times (2 \times 10^{30}) / ((4/3) \pi (10000)^3) = 9,5 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3.$$

15-) Do estudo do movimento circular uniforme sabemos que: $V = 2 \pi f R = 2 \pi 100 \times 10^4 = 6,3 \times 10^6 \text{ m/s}$, que equivale a 2% da velocidade da luz.