

3a. Lista de Exercícios

Limites de uma função real

Roberto Ortiz

Professor Livre-Docente da Escola de Artes, Ciências e Humanidades da USP

April 16, 2018

1-) Cálculo de aproximações de um limite dado. Determine $\delta > 0$ de modo que seja válido o Teorema do Limite para as funções abaixo e seus respectivos valores de ϵ :

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x - 1) = 3 \quad \epsilon = 0.2 \quad (\text{Resp. : } \delta = 0.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 4) = 10 \quad \epsilon = 0.01 \quad (\text{Resp. : } \delta = 0.005)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (3 - 4x) = 7 \quad \epsilon = 0.02 \quad (\text{Resp. : } \delta = 0.005)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4 \quad \epsilon = 0.003 \quad (\text{Resp. : } \delta = 0.0006)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 1) = 1 \quad \epsilon = 0.001 \quad (\text{Resp. : } \delta = 1/3000)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 2} \right) = -4 \quad \epsilon = 0.01 \quad (\text{Resp. : } \delta = 0.01)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} \left(\frac{3x^2 - 8x - 3}{x - 3} \right) = \frac{5}{2} \quad \epsilon = 0.001 \quad (\text{Resp. : } \delta = 1/3000)$$

2-) Propriedades operacionais dos limites. Calcule os limites abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{x^2 - 49}{x - 7} \right) \quad (\text{Resp. : } 14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3/2} \left(\frac{4x^2 - 9}{2x + 3} \right) \quad (\text{Resp. : } -6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{3x^2 - 8x - 16}{2x^2 - 9x + 4} \right) \quad (\text{Resp. : } 16/7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^3 + 8}{x + 2} \right) \quad (\text{Resp. : } 12)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3}} \quad (\text{Resp. : } \sqrt{6/5})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \right) \quad (\text{Resp. : } 1/2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} \right) \quad (\text{Resp. : } \sqrt{2}/4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x - 6}{x^2 - 3x + 2} \right) \quad (\text{Resp. : } 3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - x}{x^3 - x} \right) \quad (\text{Resp. : } \frac{1}{2})$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{3x^2 + 3x - 6} \right) \quad (\text{Resp. : } -\frac{16}{9})$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{4x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 5x - 3}{3x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 3x} \right) \quad (\text{Resp. : } \frac{7}{3})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2} \right) \quad (\text{Resp. : } \frac{1}{3})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+a+b} - \sqrt{a+b}}{x} \right) \quad (\text{Resp. : } \frac{1}{2\sqrt{a+b}})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sqrt{b^2-x} - \sqrt{b^2-a}}{x-a} \right) \quad (\text{Resp. : } -\frac{1}{2\sqrt{b^2-a}})$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{x+4}{\sqrt{x+29}-5} \right) \quad (\text{Resp. : } 10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3} \right) \quad (\text{Resp. : } \frac{1}{4})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{4x+1}-3} \right) \quad (\text{Resp. : } \frac{9}{8})$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} \right) \quad (\text{Resp. : } \frac{2\sqrt{2}}{3})$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{4 - \sqrt{10+x}}{2 - \sqrt{10-x}} \right) \quad (\text{Resp. : } -\frac{1}{2})$$

3-) Limites laterais. Faça os gráficos e calcule os limites abaixo (se existirem):

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{se } x \leq -4 \\ 4 - x & \text{se } x > -4 \end{cases}$$

Para : (a) $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$

(Resp.: (a) 8; (b) 0; (c) \exists)

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \\ 4 - x^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Para : (a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(Resp.: (a) 0; (b) 0; (c) 0)

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} & \text{se } x \leq -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{se } -3 < x < 3 \\ \sqrt{x^2 - 9} & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Para : (a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ (d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ (e) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

(Resp.: (a) 0; (b) 0; (c) 0; (d) 0; (e) 0; (f) 0)

(d)

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

Para : (a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(Resp.: (a) 1; (b) -1; (c) \bar{A})

(e) Dada a função:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq -2 \\ ax + b & \text{se } -2 < x < 2 \\ 2x - 6 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Encontre os valores de a e b , tais que

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

ambos existam.

(Resp.: $a = -3/2$, $b = 1$)

(f) Dada a função:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x > -1 \\ 3 & \text{se } x = -1 \\ 5 - ax & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

Determine $a \in \mathbb{R}$ para que exista $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(Resp.: $a = -10$.)

4-) Limites infinitos. Calcule os limites abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x + 2}{x^2 - 4} \right)$$

(Resp.: $+\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{3 + x^2}}{x} \right)$$

(Resp.: $-\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

(Resp.: $-\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 - 4x^3}{5x^2 + 3x^3} \right)$$

(Resp.: $+\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x - 1}{\sqrt{2x - x^2} - 1} \right)$$

(Resp.: $-\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{2x^2 - 3x - 5}{(2 - x)^3} \right)$$

(Resp.: $-\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{2x^2 - 3x - 5}{(2 - x)^3} \right)$$

(Resp.: $+\infty$)

5-) Limites nos extremos do domínio. Calcule os limites abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 1}{5x - 2} \right)$$

(Resp.: $2/5$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 4}{3x^2 - 5} \right)$$

(Resp.: 0)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x^3 + 2x^2 - 5}{8x^3 + x + 2} \right)$$

(Resp.: $1/2$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 4} \right)$$

(Resp.: 1)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{x + 5} \right)$$

(Resp.: -1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

(Resp.: 0)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + x} - 2x)$$

(Resp.: $-\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x + 1}$$

(Resp.: +1)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x + 1}$$

(Resp.: -1)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 1000}}$$

(Resp.: +1)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

(Resp.: +2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)$$

(Resp.: +3/2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$$

(Resp.: 0)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 3x + 4})$$

(Resp.: -1/2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax + b} - x)$$

(Resp.: a/2)

References

- [1] **Fundamentos de Matemática Elementar**, 3a. edição, Gelson Iezzi, Carlos Murakami & Nilson José Machado, Atual Editora
- [2] **Cálculo - Funções de uma e várias variáveis**, 2a. edição, Pedro A. Morettin, Samuel Hazzan & Wilton de O. Bussab, Editora Saraiva
- [3] **Cálculo Diferencial e Integral**, Roberto Romano, Editora Atlas
- [4] **O Cálculo com Geometria Analítica**, 3a. edição, Louis Leithold, Editora Harbra