4a. Lista de Exercícios
Estudo de funções, seus pontos críticos e gráficos

Roberto Ortiz*

November 1, 2017

1-) Para as funções abaixo, determine seus intervalos de crescimento e decrescimento, as concavidades, seus pontos críticos (máximos, mínimos e pontos de inflexão, se existirem) e as intersecções com os eixos-x e y (se existirem). Faça um esboço do gráfico de cada uma delas.

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

Resp.: crescente em $]-\infty; +1[\cup]+3; +\infty[$, decrescente em $]+1; +3[$, côncavo para baixo para $x < 2$ e côncavo para cima para $x > 2$, ponto de inflexão em $x = 2$, $x = 1$ é uma das raizes (encontre as outras utilizando o método de Briot-Ruffini).

(b) $f(x) = x^3 - x^2 - x$

Resp.: crescente em $]-\infty; -1/3[\cup]+1; +\infty[$, decrescente em $]-1/3; +1[$, côncavo para baixo para $x < +1/3$, côncavo para cima para $x > +1/3$, ponto de inflexão em $x = 1/3$, $x = 0$ é uma das raizes (encontre as outras efetuando a divisão de polinômios por Briot-Ruffini), intersecção com o eixo-y na origem.

(c) $f(x) = 4\sin(x/2)$ no intervalo $[-2\pi; 2\pi]$.

Resp.: crescente entre $]-\pi; +\pi[$, decrescente em $[-2\pi; -\pi[\cup]\pi; 2\pi]$, côncavo para baixo em $]0; 2\pi[$, côncavo para cima em $]-2\pi; 0[$, ponto de inflexão em $x = 0$, raizes em $x = -2\pi$, 0 e $+2\pi$, intersecção com o eixo-y na origem.

*Professor Livre-Docente da Escola de Artes, Ciências e Humanidades da USP

(d) $f(x) = (1/4)x^4 - x^3 + x^2$

Resp.: crescente em $]0;1[\ \cup\ ]+2;+\infty[$, decrescente em $]-\infty;0[\ \cup\ ]1;2[$, côncavo para baixo entre $]1-\sqrt{3}/3;1+\sqrt{3}/3[$; côncavo para cima em $]-\infty;1-\sqrt{3}/3[\ \cup\ ]1+\sqrt{3}/3;+\infty[$, ponto de inflexão em $x = 1-\sqrt{3}/3$ e em $x = 1+\sqrt{3}/3$, raizes em $x = 0$ e $x = 2$, intersecção com o eixo-y na origem.

2-) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento e caracterize os pontos críticos das seguintes funções:

(a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Resp.: decrescente em $]-\infty;-1[\ \cup\ ]1;+\infty[$, crescente em $]-1;+1[$; ponto de mínimo em $x = -1$, ponto de máximo em $x = +1$.

(b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$

Resp.: decrescente em $]-\infty;-2[\ \cup\ ]0;+\infty[$, crescente em $]-2;0[$, ponto de mínimo em $x = -2$, ponto de máximo em $x = 0$.

(c) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

Resp.: crescente em $]-\infty;0[\ \cup\ ]+2;+\infty[$, decrescente em $]0;2[$, ponto de máximo em $x = 0$ e ponto de mínimo em $x = 2$.

(d) $f(x) = e^{-x^2+2x}$

Resp.: crescente em $]-\infty;+1[$, decrescente em $]+1;+\infty[$, ponto de máximo em $x = 1$.

(e) $f(x) = e^{1/x}$

Resp.: decrescente em $]-\infty;0[\ \cup\ ]0;+\infty[$, não há pontos de máximo ou de mínimo.

(f) $f(x) = x^2\ln(1/x)$

Resp.: crescente em $]0;e^{-1/2}[$, decrescente em $]e^{-1/2};+\infty[$, ponto de máximo em $x = e^{-1/2}$.

(g) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Resp.: crescente em $]1;+\infty[$, decrescente em $]-\infty;0[\ \cup\ ]0;1[$, ponto de mínimo em $x = 1$.

(h) $f(x) = xe^{-x}$

Resp.: crescente em $]-\infty;1[$, decrescente em $]1;+\infty[$, ponto de máximo em $x=1$.

3-) Determine a concavidade, os pontos de inflexão (caso existam) e faça um esboço do gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x)=3x^4-10x^3-12x^2+10x+9$

Resp.: para cima em $]-\infty;-1/3[\,\cup\,]+2,+\infty[$, para baixo em $]-1/3;+2[$, pontos de inflexão em $x=-1/3$ e $x=2$.

(b) $f(x)=\frac{1}{x+1}$

Resp.: para cima em $]-1;+\infty[$, para baixo em $]-\infty;-1[$, não há pontos de inflexão.

(c) $f(x)=xe^{-x}$

Resp.: para cima em $]2;+\infty[$, para baixo em $]-\infty;+2[$, ponto de inflexão em $x=2$.

(d) $f(x)=e^{-(x^2/2)+x}$

Resp.: para cima em $]-\infty;0[\,\cup\,]2;+\infty[$, para baixo em $]0;2[$, pontos de inflexão em $x=0$ e $x=2$.

(e) $f(x)=\frac{x+1}{x^2}$

Resp.: para cima em $]-3;0[\,\cup\,]0;+\infty[$, para baixo em $]-\infty;-3[$, ponto de inflexão em $x=-3$.

(f) $f(x)=\sin(x)e^{-x}$, no intervalo $[0;2\pi]$

Resp.: concavidade para baixo em $]0;\pi/2[\,\cup\,]3\pi/2;2\pi[$, concavidade para cima em $]\pi/2;3\pi/2[$, pontos de inflexão em $x=\pi/2$ e $3\pi/2$.

4-) Em uma plantação, analisou-se a produção de grãos em relação à quantidade utilizada de fertilizante, x. Sendo a produção medida em toneladas e o fertilizante medido em g/m^2, estabeleceu-se que ela obedece a relação: $P(x)=-2x^3+60x^2+10000$.

(a) Esboce o gráfico de $P(x)$, indicando o ponto de inflexão, bem como os pontos de máximo e mínimo, se existirem.

Resp.: máximo em $x = 20g/m^2$*, intersecção com eixo-x em* $x = 35g/m^2$*, intersecção com eixo-y em* $y = 10000$ *ton.*

(b) Analise o traçado gráfico de $P(x)$ e determine qual o significado do ponto de inflexão.

Resp.: O ponto de inflexão dá a quantidade de fertilizante em que a produtividade é máxima, ou seja, onde a produção tem o maior crescimento.

(c) Qual é a taxa de variação de $P(x)$ no ponto de inflexão? Compare-a com as taxas de variação para as quantidades de fertilizante uma unidade inferior e uma unidade superior à do ponto de inflexão.

Resp.: $P'(9) = 594$, $P'(10) = 600$, $P'(11) = 594$.

5-) A produção P de um funcionário é modelada pela função $P(t) = -t^3 + 12t^2$, onde P é dada em unidades fabricadas e t é dado em horas, dentro do intervalo $0 < t < 12$.

(a) Determine o ponto de inflexão de $P(t)$.

Resp.: $t = 4$h.

(b) Analisando o crescimento/decrescimento e as concavidades de $P(t)$ em relação ao ponto de inflexão, interprete o significado de tal ponto.

Resp.: $P'(3) = 45$h, $P'(4) = 48$h, $P'(5) = 45$h. *No ponto de inflexão (t = 4h), a taxa de variação da produção (*$P'(4) = 48$*) do funcionário é a maior possível.*

6-) Uma caixa fechada com base quadrada deve ter um volume de 2000 cm^3. O material da tampa e do fundo da caixa custa R\$ 3,00 por cm^2 e o material para os lados da caixa custa R\$ 1,50/cm^2. Determine as dimensões da caixa tal que o custo total do material seja mínimo.

Resp.: seja x(cm) o comprimento de um lado da base quadrada e C(x) o custo total do material, a ser minimizado. A área da base é x^2*. Se chamarmos y a altura da caixa, então seu volume será:* $x^2y = 2000$*. A área total dos lados é de 4xy e a área da tampa e fundo, somadas, é de* $2x^2$*. Multiplicando pelo custo (em reais) de cada parte, o custo total da caixa será:* $3(2x^2)+1,5(4xy)$*. Porém, y pode ser obtido da primeira expressão (*$y = 2000/x^2$*) e substituindo obtemos:* $C(x) = 6x^2 + 6x(2000/x^2)$*. Derivando uma vez e igualando o resultado a zero (mínimo local) obtemos:* $x = 10$ *cm.*

7-) Repita o problema anterior para uma caixa de formato cilíndrico, de raio (a ser determinado) r, altura h e volume de 2000 cm^3, construída com o mesmos materiais para a lateral, tampa e fundo que foram utilizados no exercício anterior.

References

[1] **Matemática aplicada à Administração, Economia, Contabilidade**, Afrânio Murolo & Giácomo Bonetto, Editora Thomson, 2004

[2] **Cálculo Diferencial e Integral**, Roberto Romano, Editora Atlas

[3] **O Cálculo com Geometria Analítica**, 3a. edição, Louis Leithold, Editora Harbra