6a. Lista de Exercícios
Função exponencial, logarítmica e suas aplicações

Roberto Ortiz*

June 4, 2018

1-) Calcule as derivadas das funções abaixo (lembre-se: $\log x$ é o mesmo que $\log_{10} x$ e $\ln x$ equivale a $\log_e x$):

$f(x) = e^{5x}$ Resp.: $f'(x) = 5e^{5x}$

$f(x) = e^{-3x^2}$ Resp.: $f'(x) = -6xe^{-3x^2}$

$f(x) = e^{\cos(x)}$ Resp.: $f'(x) = -e^{\cos(x)} \sin(x)$

$f(x) = e^x \sin(e^x)$ Resp.: $e^{2x} \cos e^x + e^x \sin e^x$

$f(x) = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$ Resp.: $4/(e^x + e^{-x})^2$

$f(x) = 3^{5x}$ Resp.: $f'(x) = (5\ln(3))3^{5x}$

$f(x) = 4^{3x^2}$ Resp.: $f'(x) = 4^{3x^2}(\ln(4))6x$

$f(x) = 4^{\sin(2x)}$ Resp.: $f'(x) = 4^{\sin(2x)}(2\ln(4))\cos(2x)$

$f(x) = 2^{5x}3^{4x^2}$ Resp.: $f'(x) = 2^{5x}3^{4x^2}(5\ln(2) + 8x\ln(3))$

$f(x) = \frac{\log_{10}(x)}{x}$ Resp.: $f'(x) = \frac{1}{x^2}\log_{10}(e/x)$

$f(x) = \sqrt{\log(x)}$ Resp.: $f'(x) = \log(e)/(2x\sqrt{\log(x)})$

$f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$ Resp.: $f'(x) = \frac{\log e(1-2x-x^2)}{(x+1)(x^2+1)}$

2-) A intensidade do som, I é definida como a potência sonora (*i.e.* energia/tempo) que passa por 1 metro quadrado de área. Ela é medida no sistema

* *Professor Livre-Docente da Escola de Artes, Ciências e Humanidades da USP*

internacional de unidades em W m^{-2} (watts por metro quadrado). O limiar de audição humana é de 10^{-12} W m^{-2} e a audição dolorosa se dá em 1 W m^{-2}. Por outro lado, a *sensação* que temos do som é logarítmica e melhor expressa em **decibéis**, cujo volume é expresso como:

$$I(dB) = 10 \log(I/I_o)$$

onde I_o é a intensidade limítrofe do ouvido humano, igual a 10^{-12} W m^{-2}. Deste modo, o som do farfalhar de folhas de uma árvore é em torno de 20 decibéis, o volume de som em um escritório em torno de 40 ou 50 decibéis e o ruído do motor de um avião a jato é de cerca de 120 decibéis.

(a) Qual a intensidade sonora, em W m^{-2}, correspondente a um volume de 100 dB?

(b) Considerando que a orelha humana tenha uma área de captação de 10 cm^2, qual é a potência captada considerando o volume dado no item (a)? Quanta energia é captada pela orelha em 1 minuto de audição nesse volume?

(c) Se estamos ouvindo música a um volume de 50 dB, qual é o volume (em dB) que corresponderia ao dobro da potência?

(d) um pássaro emite um som que é percebido com um volume de 10 dB a uma distância de 300 m. Qual é o volume (em dB) percebido por uma revoada de 100 pássaros a essa mesma distância?

Resp.: (a) $I = 10^{-2}\,\mathrm{W/m^2}$; *(b)* $P = 10^{-5}\mathrm{W}$; $E = 6 \times 10^{-4}$ joule; *(c)* $50 + 10\log 2 = 53\mathrm{dB}$; *(d)* 30 dB.

3-) Se considerarmos que o som se espalha igualmente em todas as direções, sua intensidade (em W m^{-2}), diminui proporcionalmente ao quadrado da distância da fonte sonora.

Considere uma fonte sonora cuja intensidade medida à distância de 1 metro, seja de 90 dB.

(a) Qual a intensidade do som (em decibéis) a uma distância de 100 metros?

(b) A que distância o som dessa fonte tornar-se-ia inaudível, supondo-se que não haja barreiras físicas à propagação do som?

(c) Obtenha uma equação para o volume de som (em dB) dessa fonte em função da distância, em metros.

(d) Obtenha uma equação para a taxa de diminuição do volume de som (em dB) em função da distância (*i.e.* dB/metro) e obtenha o valor dessa taxa para as distâncias de 10 metros e 100 metros.

Resp.: (a) 50 dB; *(b)* 31,6 km; *(c)* $I(\text{dB}) = 90 - 20 \log d$; *(d)* $dI/dd = -\frac{20 \log e}{d}$, -0.87 dB/m à distância de 10 metros e -0.087 dB/m a 100 m.

4-) A pressão atmosférica varia com a altitude h de acordo com a seguinte equação:

$$P(h) = P_o e^{-h/H}$$

onde P_o é a pressão ao nível do mar, igual a 1 atmosfera (1atm) e H é a *escala de altura* da atmosfera. O fator H pode ser considerado constante se assumirmos que a temperatura do ar não muda com a altitude. O valor de H é de cerca de 8,5 km e este valor pode ser interpretado como *a altitude na qual a pressão atmosférica cai a um valor correspondente a 1/e (37%) da pressão ao nível do mar.*

(a) Esboce o gráfico da pressão atmosférica P em função da altitude h.

(b) Esboce o gráfico de $\ln(P)$ em função da altitude h.

(c) Determine a altitude cuja pressão corresponde a 1/10 da pressão ao nível do mar. *(Resp.:* $h = H \times \ln(10) = 19,6 km$*).*

(d) Se a pressão atmosférica no andar térreo de um edifício for de 0,95 atm, qual será a pressão no terraço desse edifício, a uma altura de 60 metros?

(e) Determine a taxa de decréscimo da pressão, em atm/km, para duas condições: ao nível do mar e à altitude de 4000 metros.

Resp.: (c) $h = H \times \ln(10) = 19,6$ km; *(d)* 0,9433 atm; *(e)* ao nível do mar: $dP/dh = -P_o/H = -(1\,\text{atm}/8,5\text{km}) = -0,118\,\text{atm/km}$ e à altitude de 4000 metros: $-(1\,\text{atm}/8,5\,\text{km}) \times e^{-4,0/8,5} = 0,073\,\text{atm/km}$.

5-) Foi observado que em um instante inicial uma colônia de bactérias tinha 10 mil indivíduos. Observou-se que esse número dobra diariamente.

(a) Assumindo um crescimento exponencial, determine uma equação para o número de indivíduos em função do tempo t, em horas.

(b) Utilizando o resultado obtido no item (a), calcule o número de bactérias após 6h do início das observações.

(c) Considerando que não haja óbitos, mas apenas nascimentos de bactérias, determine quantas bactérias nascem por minuto após 12 horas do início das observações.

Resp.: (a) $N = 10.000 \times e^{jt}$ onde t é o tempo medido em horas e $j = \ln(2)/24$; *(b)* $N(6) = 10.000 \times e^{(\ln(2))/4} = 11.892$ indivíduos; *(c)* $dN/dt = N_o j e^{jt} = 10.000 \times (\ln(2)/24) \times e^{t\ln(2)/24} = 289\, e^{0.02888\times 12}$ *bacterias/hora* $= 409$ *bacterias/hora* $= 6,8$ *bacterias/minuto.*

6-) A velocidade de um corpo em queda livre pode ser modelizada considerando-se que a força de resistência do ar (F_r) é aproximadamente proporcional à velocidade do corpo (v):

$$F_r = -kv$$

onde k é uma constante que depende principalmente da **forma** do corpo. Utilizando-se equações diferenciais pode-se obter a seguinte equação para a velocidade do corpo em função do tempo t:

$$v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m})$$

onde m e g são respectivamente a massa do corpo e a aceleração da gravidade. Utilizando a equação acima:

(a) Esboce o gráfico de $v(t)$

(b) Obtenha a *velocidade terminal* do corpo fazendo o limite de $v(t)$ para t tendendo ao infinito.

(c) Derive a expressão $v(t)$ para obter a expressão da aceleração do corpo $a(t)$ e esboce o seu gráfico.

(d) Obtenha a *aceleração terminal* do corpo fazendo o limite de $a(t)$ para t tendendo ao infinito.

Resp.: (b) $v_{\text{term}} = mg/k$; *(c)* $a(t) = ge^{-kt/m}$; *(d)* $a_{\text{term}} = 0$.

References

[1] **Cálculo - Volume 1**, 2a. edição, James Stewart, Cengage Learning, 2016

[2] **O Cálculo com Geometria Analítica**, 3a. edição, Louis Leithold, Editora Harbra