Oscilações amortecidas e forçadas em uma dimensão

Roberto Ortiz

Professor Livre-Docente
EACH – USP

Condições:

- Oscilações “livres”, i.e. sujeitas somente à força restauradora, são uma idealização
- Na natureza as oscilações são frequentemente amortecidas por uma força de atrito
- A resistência do ar ou o atrito com o meio são as fontes de amortecimento mais comuns
- A “lei de Bernoulli” para os fluidos diz que a força de arraste em um fluido é proporcional ao quadrado da velocidade

Força de arraste, segundo Bernoulli:

$$F_a = \tfrac{1}{2}\, \rho\, \eta\, A\, V^2$$

onde:

- F_a é a <u>intensidade</u> da força de arraste
- *ρ é a <u>densidade</u> do meio*
- *η é o <u>coeficiente de arraste</u> do corpo*
- *V é a <u>velocidade do objeto</u> em relação ao meio*
- *A é a <u>seção transversal</u> do corpo*

O coeficiente de arraste depende principalmente da aerodinâmica do corpo

A introdução de um termo quadrático na equação diferencial torna-a de difícil solução

Por isso, utiliza-se a aproximação para baixas velocidades:

$$F_a \sim V^1$$

Os demais termos da equação de Bernoulli são constantes, logo podemos escrever simplesmente que a força de arraste é proporcional à velocidade:

$$F_a = -b\,V$$

Desta forma, a equação diferencial de um sistema sujeito a um amortecimento é, utilizando a notação do cálculo diferencial:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

ou ainda:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right)x(t) = 0$$

onde *x* é uma função do tempo, *k e m* são características do objeto oscilante e *b* é o coeficiente de amortecimento.

A equação acima é uma *equação diferencial ordinária de segunda-ordem, homogênea*

No caso de oscilações amortecidas não temos certeza se a solução será periódica.

Vamos tentar uma solução geral sob a forma de uma exponencial:

$$x(t) = Ae^{ct}$$

Em seguida, calculamos sua primeira e segunda derivadas:

$$x'(t) = cAe^{ct}$$

$$x''(t) = c^2Ae^{ct}$$

$$x(t) = Ae^{ct}$$

Vamos “testar” essa solução na nossa equação diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right)x(t) = 0$$

$$c^2 Ae^{ct} + (b/m)cAe^{ct} + (k/m)Ae^{ct} = 0$$

$$x(t) = Ae^{ct}$$

Vamos "testar" essa solução na nossa equação diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right)x(t) = 0$$

$$c^2 \cancel{A}\cancel{e}^{ct} + (b/m)c\cancel{A}\cancel{e}^{ct} + (k/m)\cancel{A}\cancel{e}^{ct} = 0$$

$$\boxed{c^2 + \left(\frac{b}{m}\right)c + \left(\frac{k}{m}\right) = 0}$$

"Polinômio característico" da equação diferencial

Utilizamos a fórmula de Bhaskara para resolver o polinômio característico e obter os valores de *c*:

$$c = \frac{1}{2}\left(-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{m^2} - \frac{4k}{m}}\right)$$

$$c = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2 - 4mk}{m^2}}$$

$$c = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk}$$

onde *c* será inserido na exponencial: $x(t) = Ae^{ct}$

Caso I: $b^2 < 4mk$ (sub-amortecimento)

Neste caso, o quadrado do coeficiente de amortecimento é relativamente pequeno quando comparado ao produto da constante elástica com a massa do objeto

O termo dentro do radical da exponencial torna-se negativo e a raiz é um número complexo

$$c = -\frac{b}{2m} \pm \left(\frac{1}{2m}\sqrt{4mk - b^2}\right) i$$

Caso I: $b^2 < 4mk$ (sub-amortecimento)

Neste caso, o quadrado do coeficiente de amortecimento é relativamente pequeno quando comparado ao produto da constante elástica com a massa do objeto

O termo dentro do radical da exponencial torna-se negativo e a raiz é um número complexo

$$c = \underbrace{\boxed{-\frac{b}{2m}}}_{\text{parte real}} \pm \underbrace{\boxed{\left(\frac{1}{2m}\sqrt{4mk - b^2}\right) i}}_{\text{parte complexa}}$$

A parte complexa da exponencial:

$$e^{\pm\frac{\sqrt{4mk-b^2}}{2m}it}$$

é periódica, pois segundo a fórmula de Euler:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

Obviamente descartamos a parte complexa dessa solução e finalmente obtemos a equação do <u>movimento oscilatório amortecido</u>:

$$x(t) = Ae^{ct} = Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega_a t)$$

A parte complexa da exponencial:

$$e^{\pm \frac{\sqrt{4mk-b^2}}{2m} it}$$

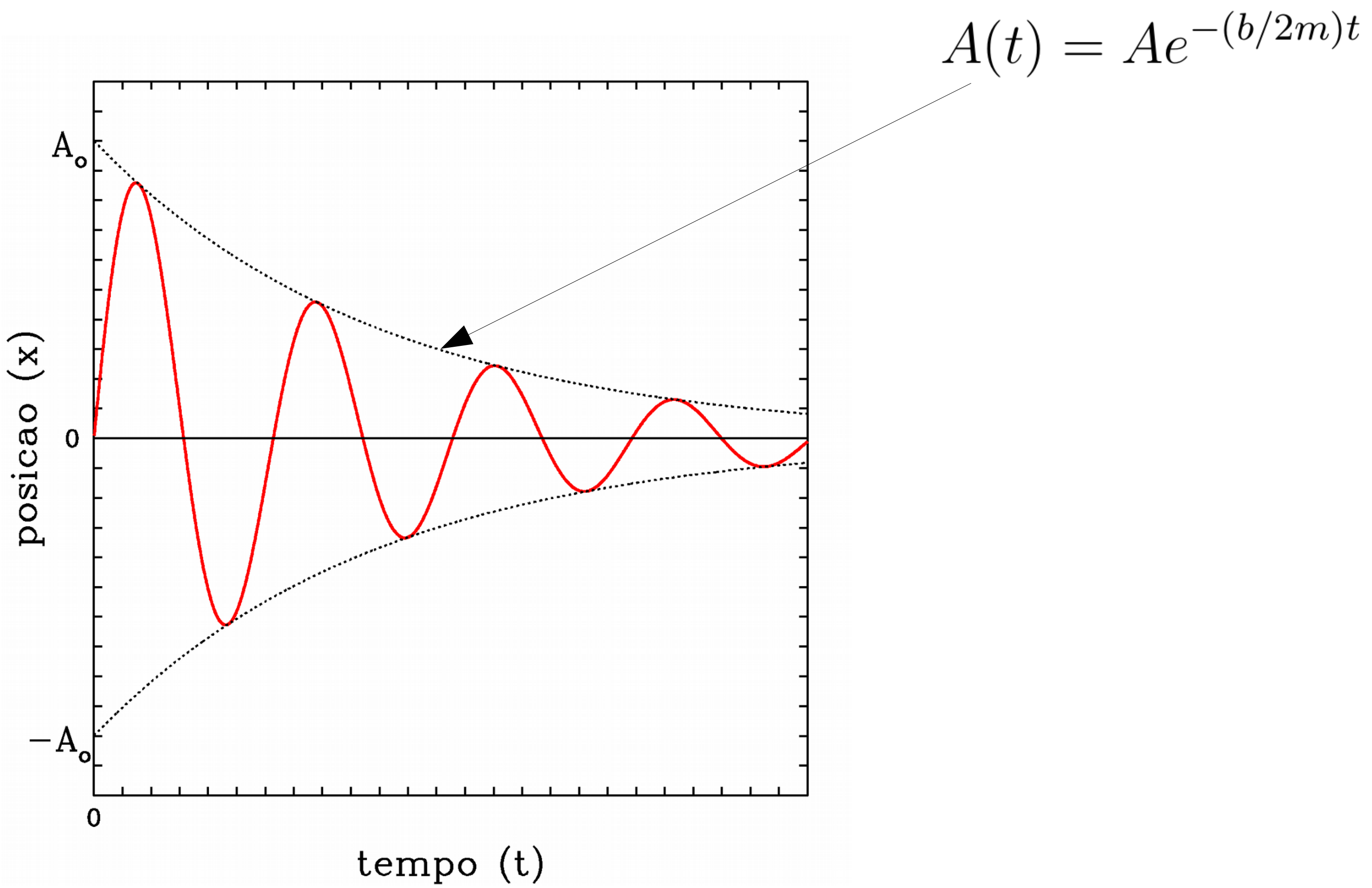
é periódica, pois segundo a fórmula de Euler:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

Obviamente descartamos a parte complexa dessa solução e finalmente obtemos a equação do <u>movimento oscilatório amortecido</u>:

$$x(t) = Ae^{ct} = \underbrace{\boxed{Ae^{-(b/2m)t}}}_{\text{Amplitude decrescente}} \underbrace{\boxed{\cos(\omega_a t)}}_{\text{parte oscilante}}$$

Gráfico da posição de um sistema oscilante amortecido



A frequência angular de oscilação é dada pela exponencial complexa:

$$\omega_a = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m} = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{\sqrt{4m^2}} = \sqrt{\frac{4mk}{4m^2} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{m}\right)^2}$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{m}\right)^2}$$

Observe que essa frequência é um pouco <u>menor</u> do que aquela do oscilador harmônico não-amortecido.

Caso II: $b^2 \geq 4mk$ (super-amortecimento e amortecimento crítico)

Quando o coeficiente de amortecimento *b* ultrapassa um valor crítico a exponencial é de um número real.

$$c = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m}\frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{b^2}}\sqrt{b^2 - 4mk}$$

$$c = -\frac{b}{2m} \pm \frac{b}{2m}\sqrt{\frac{b^2 - 4mk}{b^2}}$$

$$c = -\frac{b}{2m} \pm \frac{b}{2m}\sqrt{1 - \frac{4mk}{b^2}}$$

Caso II: $b^2 \geq 4mk$ (super-amortecimento e amortecimento crítico)

Quando o coeficiente de amortecimento *b* ultrapassa um valor crítico a exponencial é de um número real.

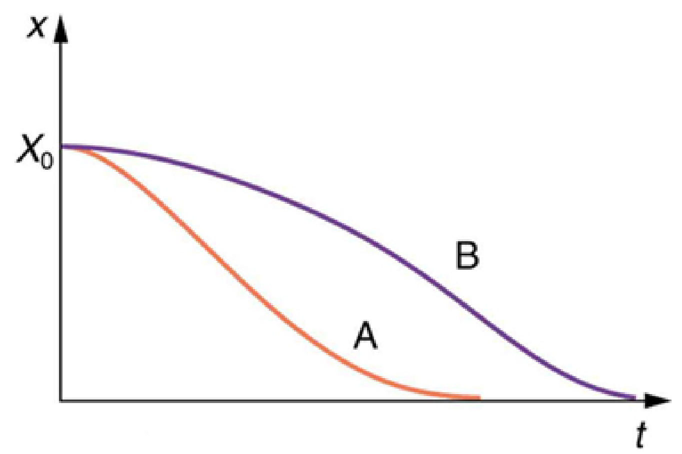
$$c = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m}\frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{b^2}}\sqrt{b^2 - 4mk}$$

$$c = -\frac{b}{2m} \pm \frac{b}{2m}\sqrt{\frac{b^2 - 4mk}{b^2}}$$

$$c = -\frac{b}{2m} \pm \frac{b}{2m}\sqrt{1 - \frac{4mk}{b^2}} \; < 1$$

Neste caso o sistema não oscila.

A força restauradora conduz a massa *m* à posição de equilíbrio



A: super-amortecimento
B: amortecimento crítico

Oscilações Forçadas

Suponhamos uma força externa fazendo oscilar uma massa *m*, sujeita a uma constante elástica *k*, com amortecimento *b* e com frequência angular

$$\omega_f$$

A equação diferencial desse movimento é:

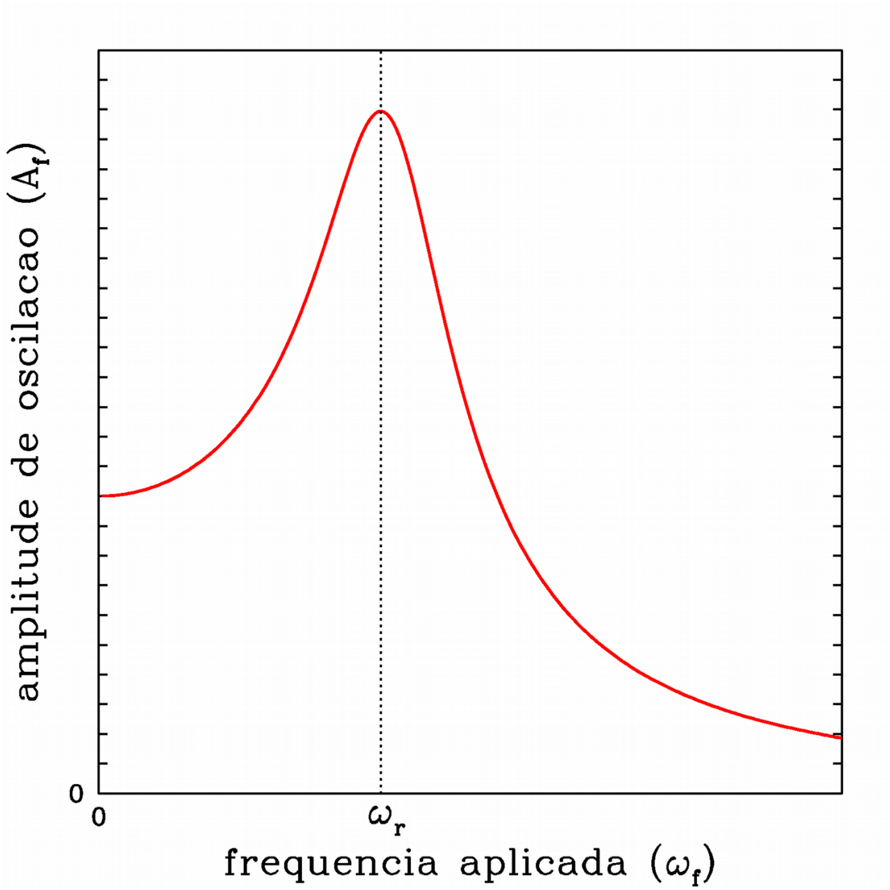
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_o\cos(\omega_f t)$$

A solução dessa equação diferencial não-homogênea é:

$$x(t) = A_f\cos(\omega_f t + \phi)$$

A amplitude do movimento depende da relação entre a frequência angular ”natural” ω_o e a frequência angular da força aplicada ω_f.

$$A_f = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_o^2)^2 + (b/m)^2\omega_f^2}}$$



Oscilações Forçadas e Ressonância

Um sistema oscilante atinge uma amplitude máxima na ressonância

A amplitude máxima de um sistema é atingida quando o denominador $g(\omega_f)$ de A_f tem um valor mínimo:

$$g(\omega_f) = (\omega_f^2 - \omega_o^2)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega_f^2$$

$$\frac{dg}{d\omega_f} = 2(\omega_f^2 - \omega_o^2)^1 2\omega_f + 2\left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega_f^1 = 0$$

Oscilações Forçadas e Ressonância

Um sistema oscilante atinge uma amplitude máxima na ressonância

A amplitude máxima de um sistema é atingida quando o denominador $g(\omega_f)$ de A_f tem um valor mínimo:

$$g(\omega_f) = (\omega_f^2 - \omega_o^2)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega_f^2$$

$$\frac{dg}{d\omega_f} = 2(\omega_f^2 - \omega_o^2)^1 \cancel{2}\cancel{\omega_f} + \cancel{2}\left(\frac{b}{m}\right)^2 \cancel{\omega_f^1} = 0$$

$$2(\omega_f^2 - \omega_o^2) + \left(\frac{b}{m}\right)^2 = 0$$

$$2\omega_f^2 - 2\omega_o^2 = -\left(\frac{b}{m}\right)^2$$

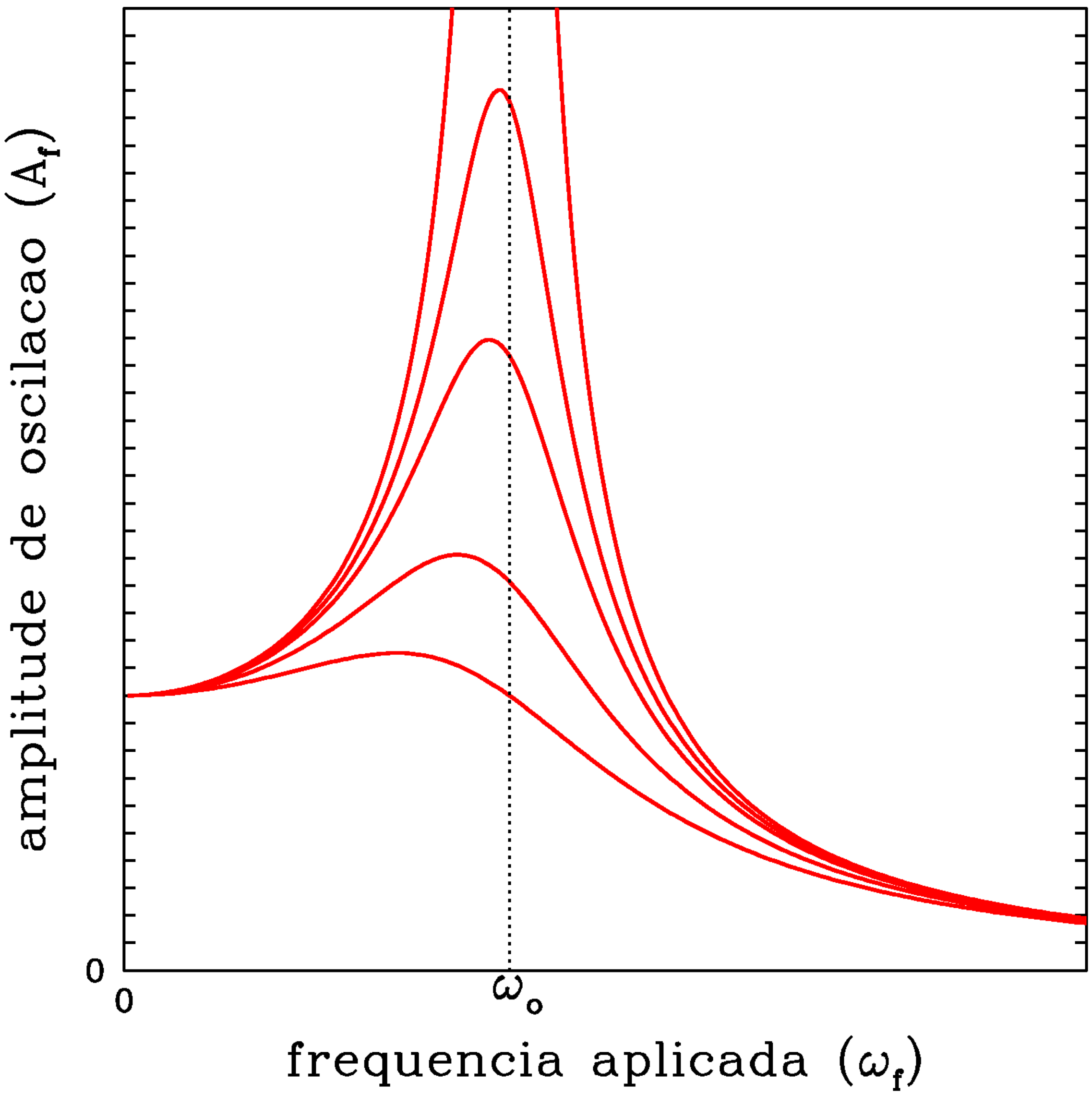
$$\omega_f^2 = \frac{1}{2}\left(2\omega_o^2 - \left(\frac{b}{m}\right)^2\right)$$

$$\omega_r = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{m}\right)^2}$$

Note que:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} > \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{m}\right)^2} > \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{m}\right)^2}$$

$$\omega_o > \omega_a > \omega_r$$



$$A_f = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_o^2)^2 + (b/m)^2\omega_f^2}}$$

Energia e potência dissipada de sistemas oscilantes

Em um sistema oscilante sem amortecimento a energia mecânica é constante:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$$

$$U(x) = -\int F(x)dx = -\int -kxdx = \frac{1}{2}kx^2$$

Energia e potência dissipada de sistemas oscilantes

Em um sistema oscilante sem amortecimento a energia mecânica é constante:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$$

$$U(x) = -\int F(x)dx = -\int -kxdx = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Dissipação de energia em sistemas amortecidos:

A força amortecedora não é constante

↓

a dissipação depende da velocidade

$$P_i(t) = \frac{dE}{dt}$$

$$P_i(t) = \left(\frac{dE}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) = F_a(t)v(t)$$

$$P_i(t) = -bv^2(t) = -b\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

Potência dissipada “média” de um oscilador amortecido

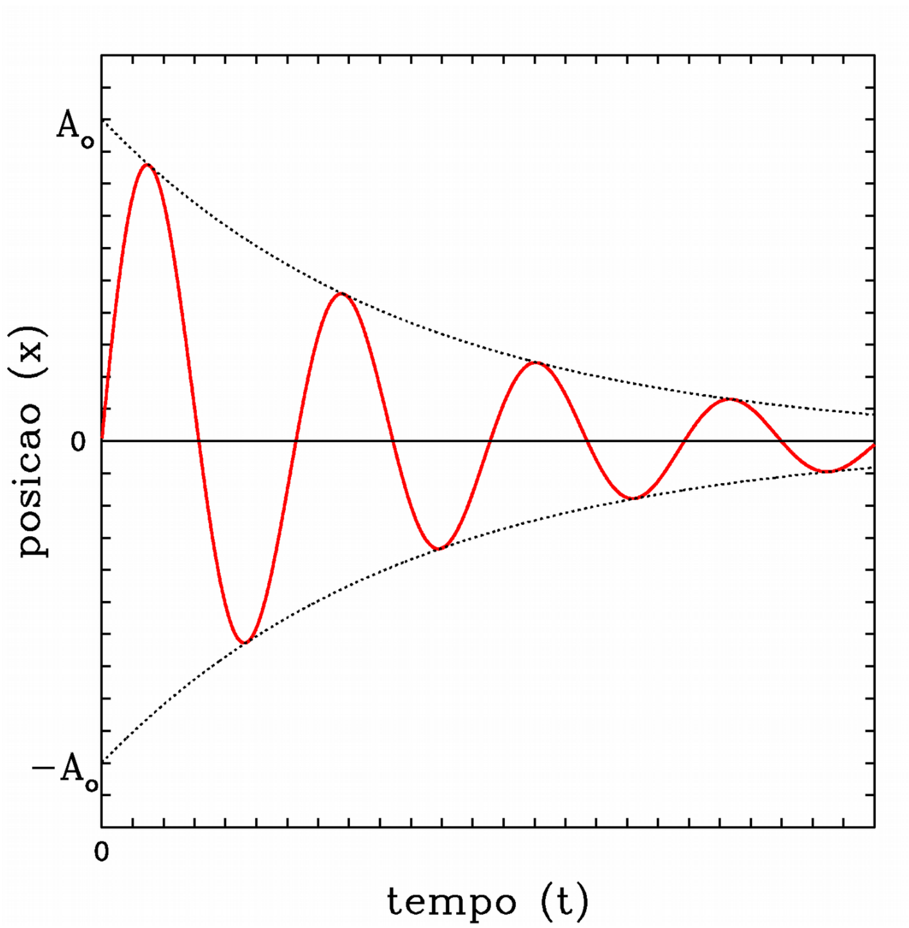
$$P_{\mathrm{m}} = \frac{dE}{dt}$$

$$P_{\mathrm{m}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kA^2(t)\right)$$

$$P_{\mathrm{m}} = \frac{k}{2}\frac{d}{dt}\left(Ae^{-(b/2m)t}\right)^2$$

$$P_{\mathrm{m}} = \frac{k}{2}\frac{d}{dt}\left(A^2e^{-(b/m)t}\right)$$

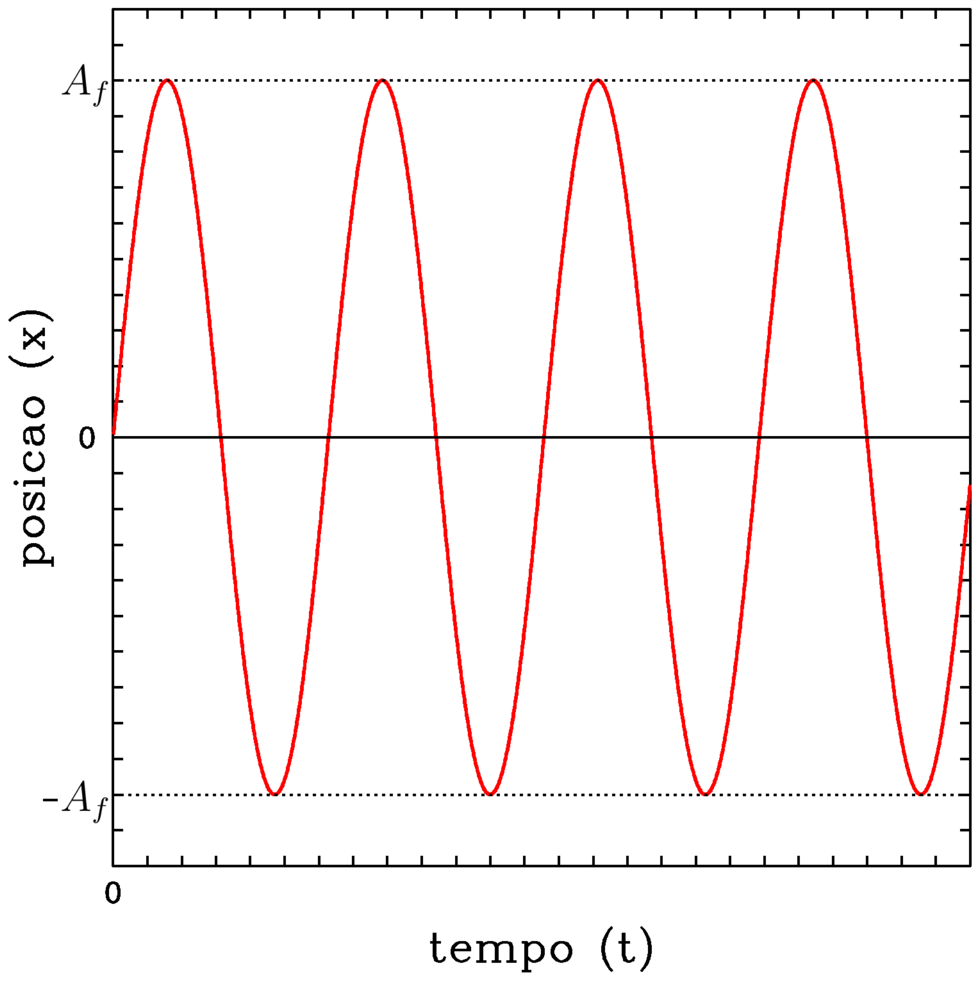
$$P_{\mathrm{m}} = -\frac{bkA^2}{2m}e^{-(b/m)t}$$



Potência dissipada média de um oscilador forçado

$$P_{\mathrm{m}} = -\frac{bkA_f^2(\omega_f)}{2m}$$

$$P_{\mathrm{m}} = -\frac{bkF_o^2}{2m^3[(\omega_f^2 - \omega_o^2)^2 + (b/m)^2\omega_f^2]}$$



Fim