O oscilador harmônico em uma dimensão

Roberto Ortiz

Professor Livre-Docente
EACH – USP

Condições:

- No oscilador *harmônico* o sistema possui uma “posição de equilíbrio”
- Quando o sistema se afasta dessa posição surge uma força
- A intensidade da força é diretamente proporcional ao deslocamento da posição de equilíbrio
- A força opõe-se ao deslocamento
- Tais sistemas são chamados “elásticos”

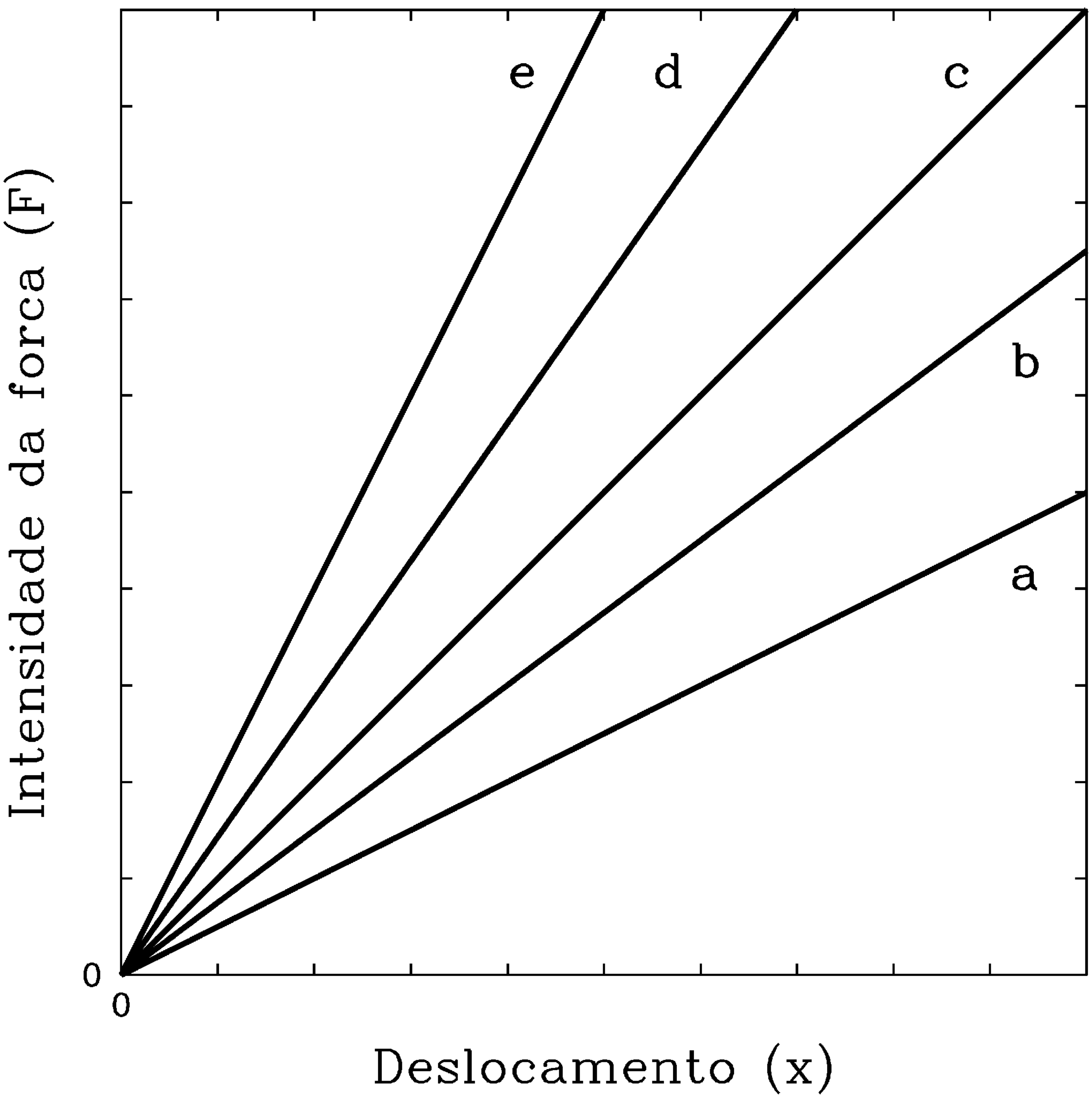
Matematicamente, escreve-se:

$$F = -kx$$

onde:

- *F* é a intensidade da força
- *x* é o deslocamento a partir da posição de equilíbrio
- *k* é a constante elástica do sistema

Quanto maior o valor de *k*, maior é a força elástica *F* para um dado deslocamento



Na figura acima: $k_a < k_b < k_c < k_d < k_e$

Podemos reescrever a equação anterior
(*F* = – *k x*) utilizando a notação do cálculo diferencial:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

ou ainda:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x(t)$$

onde *x* é uma função do tempo e *k/m* é uma constante.

A equação acima é uma
equação diferencial ordinária de segunda-ordem, homogênea

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x(t)$$

Que tipo de função tem sua 2a. derivada do mesmo tipo que a função original?

- Polinômios?
- Exponenciais?
- Trigonométricas?
- Potências?

A função buscada deve ser <u>periódica</u>, pois trata-se de um sistema oscilatório!

Vamos testar senos e cosenos:

$$x(t) = \sin(t)$$

$$x'(t) = \cos(t)$$

$$x''(t) = -\sin(t)$$

Podemos generalizar ainda mais:

$$x(t) = A\sin(\omega t)$$

$$x'(t) = A\omega\cos(\omega t)$$

$$x''(t) = -A\omega^2\sin(\omega t)$$

Vamos testar senos e cosenos:

$$x(t) = \sin(t)$$

$$x'(t) = \cos(t)$$

$$x''(t) = -\sin(t)$$

Podemos generalizar ainda mais:

$$x(t) = \boxed{A\sin(\omega t)}$$

$$x'(t) = A\omega\cos(\omega t)$$

$$x''(t) = -\boxed{A}\omega^2\boxed{\sin(\omega t)}$$

Logo, concluimos que:

$$x''(t) = -\omega^2 x(t)$$

Do mesmo modo, a função <u>coseno</u> também é solução da equação diferencial do oscilador harmônico

Questão:

O que significam *A* e ω *na função abaixo*?

$$x(t) = A\sin(\omega t)$$

A é a <u>amplitude da oscilação</u>

Um ciclo completo: $\omega T = 2\pi$, logo:

$$\omega = 2\pi / T$$

ω é a <u>frequência angular</u> do sistema. É medida em radianos por segundo.

Agora comparamos as equações abaixo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x(t)$$

$$x''(t) = -\omega^2 x(t)$$

Portanto:

$$\omega = \sqrt{k/m} = 2\pi/T$$

Observamos que:

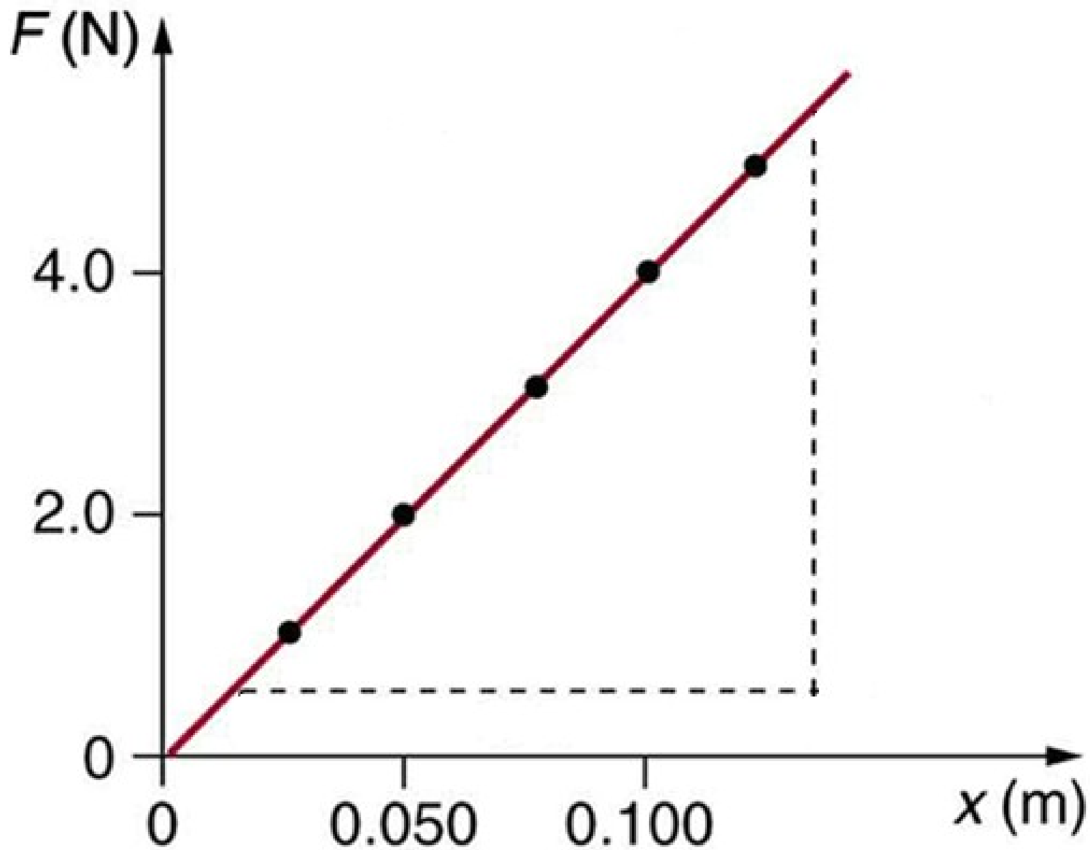
- A frequência angular é inversamente proporcional ao período de oscilação
- A frequência angular é diretamente proporcional à raiz quadrada da constante elástica do sistema
- A frequência angular é inversamente proporcional à raiz quadrada da massa do sistema oscilatório

Logo, a frequência angular do sistema pode ser obtida a partir das seguintes características do sistema:

1) a massa
2) a constante elástica

A massa (***m***) é medida diretamente com uma balança e a constante elástica (***k***) é obtida experimentalmente efetuando-se medidas com um dinamômetro e régua

Exemplo: como obter a constante elástica de uma mola



m (kg)	P (N)	x (m)
0.000	0.00	0.000
0.100	0.98	0.025
0.200	1.96	0.050
0.300	2.94	0.076
0.400	3.92	0.099
0.500	4.90	0.127

- Penduram-se diferentes massas a uma mola pendurada na posição vertical.
- A constante elástica *k* é obtida a partir do gráfico da força em função do deslocamento.
- *k* (N/m) equivale à inclinação da reta

Solução geral da equação do movimento

Vimos que são soluções da equação do movimento funções do tipo:

A sin(ω*t)* e *B cos(*ω*t)*

Na verdade, *combinações lineares* de funções desse tipo também são soluções válidas:

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + B \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Poderia-se ainda incluir uma *fase inicial* no argumento das funções trigonométricas para ajustar a equação do movimento às condições iniciais:

$$x(t) = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right) + B\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

Vamos verificar que a solução acima é válida:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{2\pi}{T}\right) A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right) - \left(\frac{2\pi}{T}\right) B\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right) - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 B\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

Poderia-se ainda incluir uma *fase inicial* no argumento das funções trigonométricas para ajustar a equação do movimento às condições iniciais:

$$x(t) = \boxed{A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right)} + \boxed{B\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)}$$

Vamos verificar que a solução acima é válida:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{2\pi}{T}\right) A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right) - \left(\frac{2\pi}{T}\right) B\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \boxed{A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right)} - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \boxed{B\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)}$$

Portanto a solução geral, escrita como uma combinação linear de seno e coseno, incluindo uma fase inicial é solução da equação do movimento oscilatório pois:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x(t) = -\omega^2 x(t)$$

Na prática, geralmente opta-se por $A = 0$ ou $B = 0$, dependendo das condições do problema

As constantes δ e ϕ são determinadas a partir das condições iniciais.

Por exemplo:

Se no instante inicial do movimento ($t = 0$) a posição da massa m é igual a c:

Se $B = 0$: $x(0) = c = A \sin(\delta) \rightarrow \delta = \arcsin(c/A)$

ou

Se $A = 0$: $x(0) = c = B \cos(\phi) \rightarrow \phi = \arccos(c/B)$

Exercício:

Determine a equação do movimento de um sistema oscilatório composto por uma massa de 400 g, com amplitude de 30 cm e uma mola de constante elástica 10 N/m. Considere que no instante inicial sua posição era de 15 cm e que a massa dirigia-se em direção à posição de equilíbrio.

Solução:

Tomamos a solução geral da equação do movimento:

$$x(t) = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right) + B\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

Calculamos a frequência angular:

$$\omega = \sqrt{k/m} = 2\pi/T$$

Onde k = 10 N/m e m = 0,400 kg → ω = 5 rad/s

Fazemos B = 0. Sabendo-se que a amplitude do movimento é de 0,30 m, obtemos:

x(t) = 0,30 sin (5 t + δ)

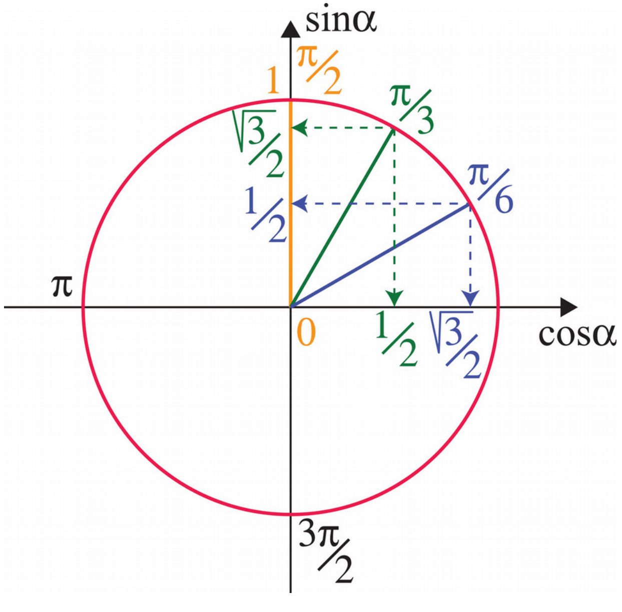
Resta calcular a constante δ, a *fase inicial*. Aplicamos a *condição inicial* do problema:

$$x(0) = 0{,}30 \sin(5 \times 0 + \delta) = 0{,}15$$

$$\sin(\delta) = 0{,}15/0{,}30 = ½$$

$$\delta = \arcsin(½)$$

Temos duas soluções: $\delta = \pi/6$ ou $5\pi/6$



A solução válida é aquela que atende a condição da velocidade: o objeto dirige-se à origem:

$$v(0) < 0$$

Vamos portanto obter uma expressão para a velocidade do sistema, derivando-se a função posição:

$$x(\mathrm{t}) = 0{,}30 \sin (5\,t + \delta)$$

$$v(\mathrm{t}) = 0{,}30 \times 5 \cos (5\,t + \delta) = 1{,}5 \cos (5\,t + \delta)$$

No instante inicial ($t = 0$):

$v(0) = 1{,}5 \cos (\pi/6)$ **ou** $v(0) = 1{,}5 \cos (5\pi/6)$

Como sabemos que $v(0)$ deve ser negativo então:

$$\cos(\delta) < 0$$

Logo:

$\delta = 5\pi/6$ pois <u>o coseno é negativo no 2º. quadrante</u>

E a equação do movimento é:

$$\boxed{x(t) = 0{,}30 \sin(5\,t + 5\pi/6)}$$

Exercício:

Determine o período de oscilação de um pêndulo formado por uma massa m, pendurada por um fio de massa desprezível de comprimento L.

Solução:

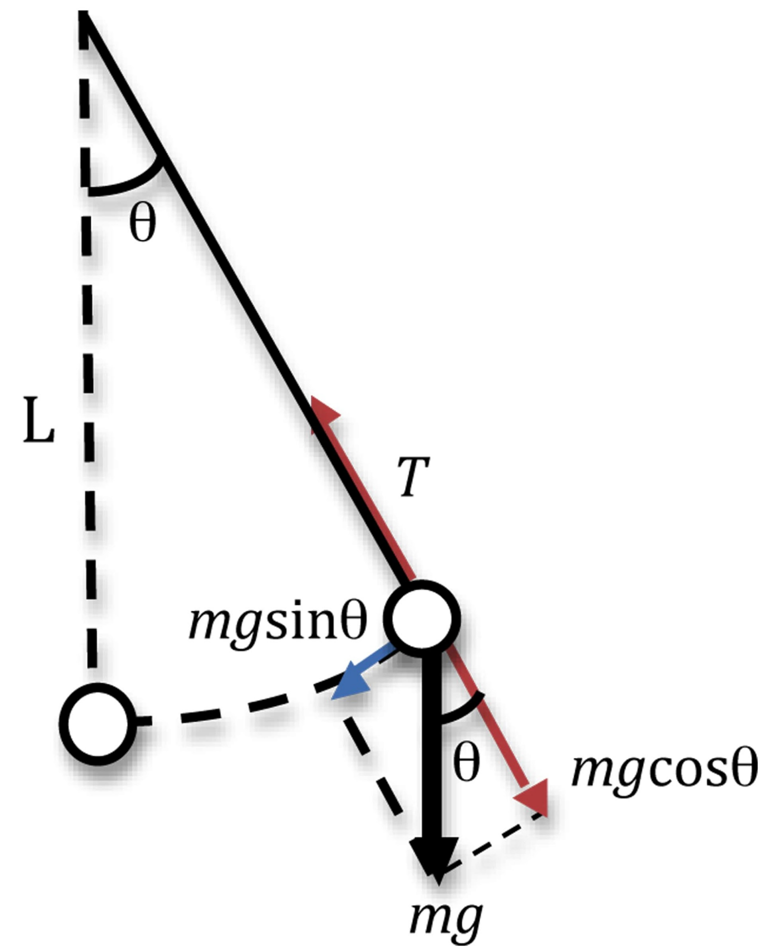
A figura ao lado ilustra as forças atuantes sobre a massa *m*. Vamos analisar o caso de um ângulo de oscilação θ pequeno. Neste caso, a oscilação se dá praticamente na direção horizontal.

A força na direção horizontal é:

$F = mg \sin \theta$.

O deslocamento na direção horizontal é:

$x = L \sin \theta$.



Solução:

A <u>força</u> na direção horizontal é:

$F = mg \sin \theta$.

O <u>deslocamento</u> na direção horizontal é:

$x = L \sin \theta$.

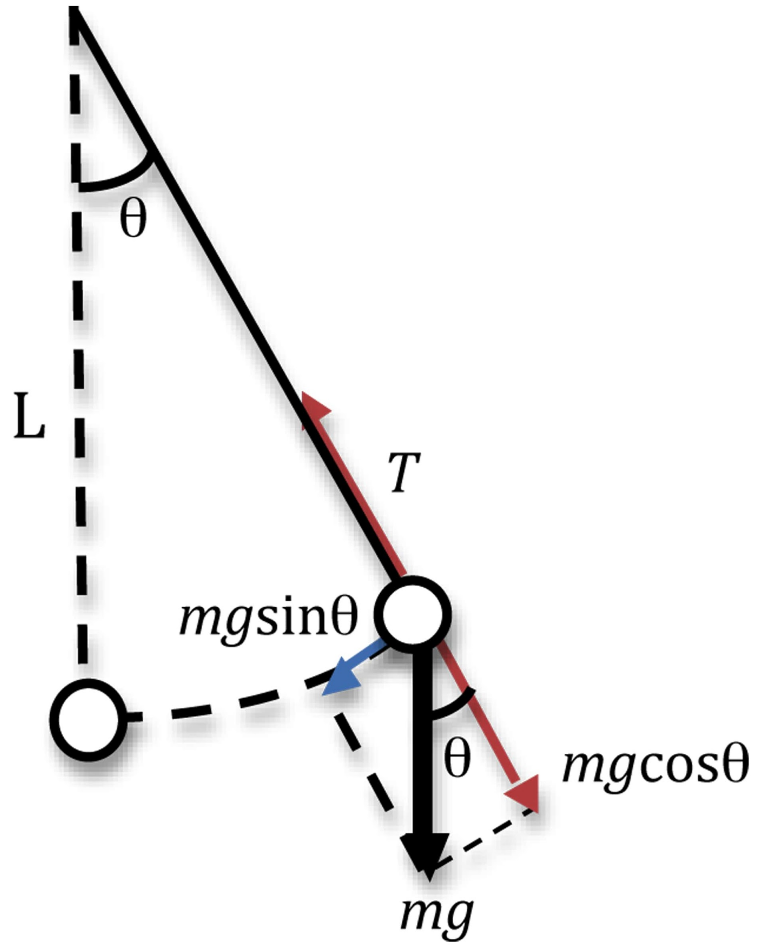
Logo, a força é proporcional ao deslocamento:

$F = m\, a = mg \sin \theta = -\, mg\, (x / L)$

$d^2x/dt^2 = -\,(g / L)\, x(t)$

Nestes casos temos:

$$x''(t) = -\omega^2 x(t)$$



Portanto:

$$\omega^2 = g / L = (2\pi / T)^2$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Note que o período não depende da massa do pêndulo, mas somente do comprimento do fio.

Nota:

Em todos os casos abordados nesta aula a força resultante atuante sobre a massa era a responsável pela oscilação.

Na prática, os sistemas físicos geralmente contêm outras forças: de amortecimento ou de impulsão. Esses casos serão tratados à parte.