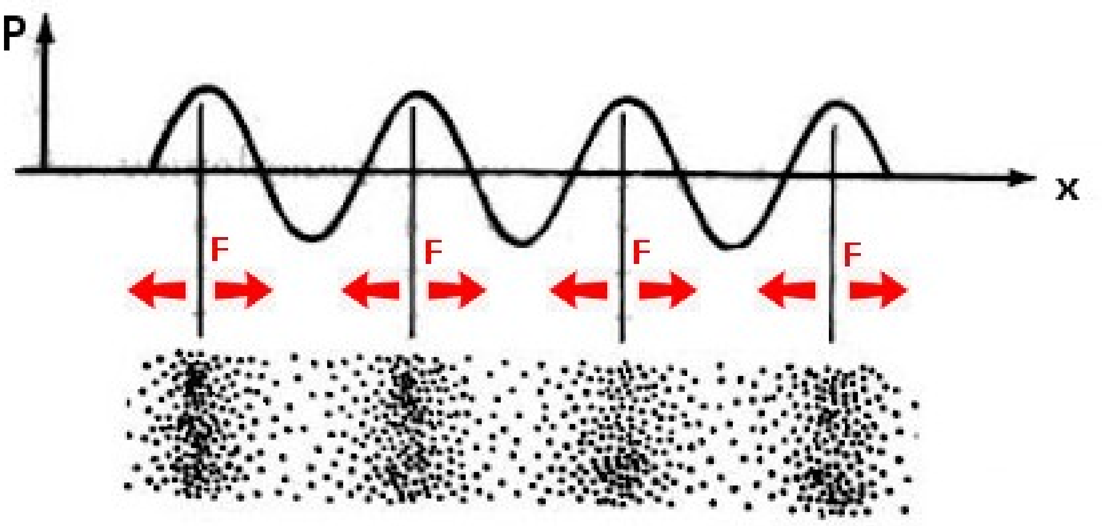
Ondas longitudinais

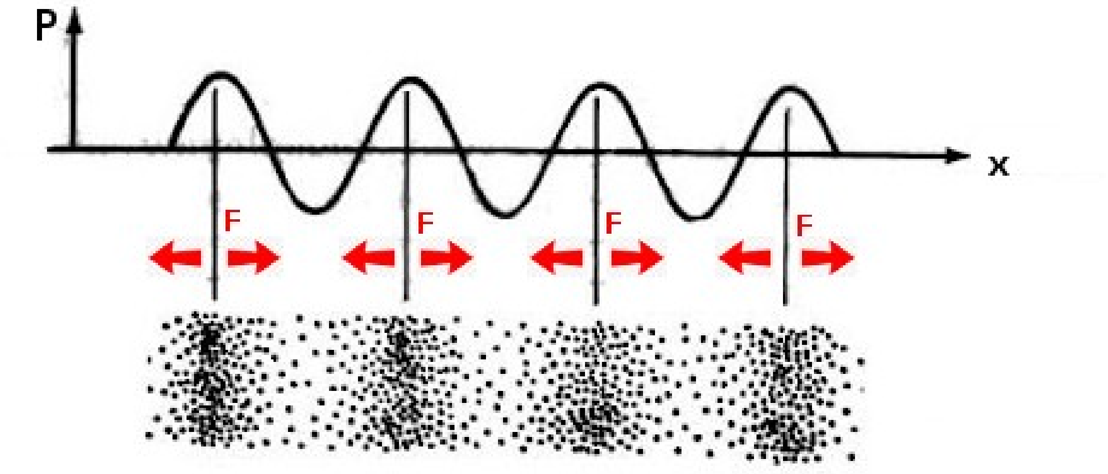
Roberto Ortiz

Professor Livre-Docente
EACH – USP

A velocidade de uma onda longitudinal

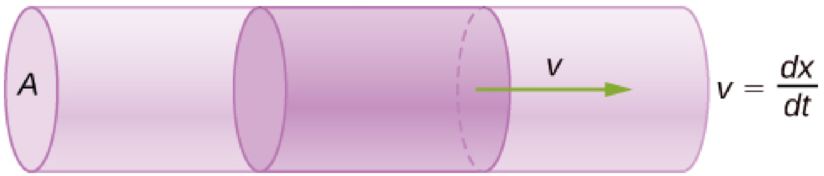
- Suponhamos uma onda longitudinal propagando-se em um meio material
- A velocidade da onda depende da elasticidade do meio e de sua densidade
- Em um meio gasoso haverá zonas de sobrepressão. A força resultante é “de dentro para fora” dessa zona.

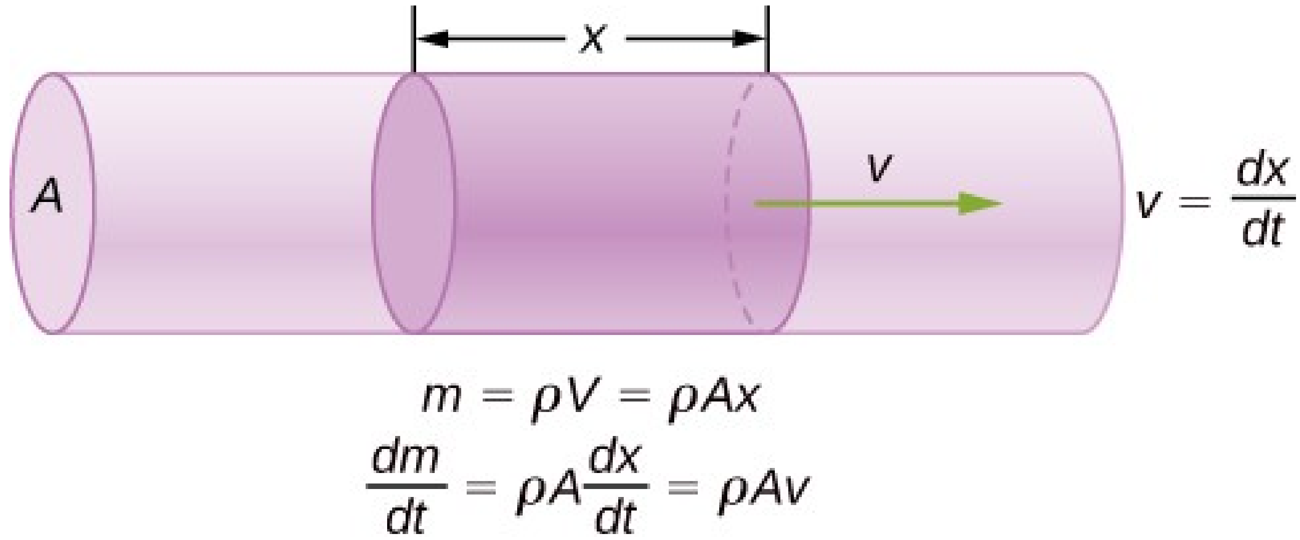




- Observe na figura acima que a força resultante sempre se opõe à derivada (ou gradiente) de pressão:
    - Pressão diminui com $x \rightarrow \Delta P < 0 \rightarrow F > 0$
    - Pressão aumenta com $x \rightarrow \Delta P > 0 \rightarrow F < 0$
- Suponha uma onda longitudinal propagando-se em um tubo horizontal. A resultante sobre um pequeno volume *dV* será:

$$F = P\,A - (P + dP)\,A = -\,dP\,A$$





Pela figura acima vemos que:

$$dm = \rho dV = \rho A dx = \rho A v dt$$

Aplicamos a 2a. lei de Newton ao volume dV. A força resultante (F_{res}) sobre o volume dV é:

$$F_{\text{res}} = dm \times a = dm \frac{dv}{dt}$$

onde a massa dm do volume dV foi deduzida anteriormente e, quando substituida na expressão acima resulta em:

$$F_{\text{res}} = dm \times a = \rho A v dt \frac{dv}{dt} = \rho A v dv$$

No entanto, já vimos que a força resultante também é o resultado da "sobrepressão" causada pela passagem da onda ($F_{\text{res}} = -AdP$), logo:

$$F_{\text{res}} = -AdP = \rho A v dv$$

$$dP = -\rho v dv$$

Multiplicamos a expressão acima por v:

$$vdP = -\rho v^2 dv$$

$$\rho v^2 = -dP \frac{v}{dv}$$

Observe a razão v/dv (*i.e.* entre a velocidade da onda e o acréscimo de velocidade provocado pela pressão). Essa razão relaciona-se com a razão de compressão do gás V/dV:

$$V = Adx = vAdt$$

Diferenciando:

$$dV = dvAdt$$

$$\frac{V}{dV} = \frac{vAdt}{dvAdt} = \frac{v}{dv}$$

Portanto, podemos substituir v/dv por V/dV na expressão de ρv^2:

$$\rho v^2 = -dP\frac{V}{dV}$$

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Onde a razão:

$$B = -\frac{dP}{dV/V}$$

é chamada de “módulo de elasticidade volumar”. *B* é uma medida da elasticidade do meio onde se propaga a onda longitudinal.

A expressão que encontramos para a velocidade do som é genérica para sólidos, líquidos e gases. Podemos aplicá-la para casos específicos.

Determinação da velocidade do som (método de Newton)

- Isaac Newton utilizou a fórmula que encontramos para deduzir a velocidade do som no ar.
- Ele considerou que, durante a passagem da onda sonora, o ar é um gás ideal e sofre uma transformação <u>isotérmica</u>.
- Diferenciamos a equação dos gases perfeitos:

$$P\,V = n\,R\,T$$

$$dP\,V + P\,dV = n\,R\,dT = 0$$

$$dV = -V\frac{dP}{P}$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P}$$

$$B = -\frac{dP}{dV/V} = -\frac{dP}{-dP/P} = +P$$

$$PV = nRT$$

$$P = \frac{n}{V}RT = \frac{m}{MV}RT = \frac{\rho RT}{M}$$

onde n/V é o número de mols por volume, ρ é a densidade do gás ($\rho = m/V$) e M é a massa molecular do gás.

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\rho RT}{M\rho}}$$

$$v = \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

onde *R* é a constante dos gases perfeitos (*R* = 8,31 J/mol K).

A expressão acima, obtida por Newton, fornece resultados cerca de 20% menores do que os resultados experimentais.

O “erro” cometido por Newton foi admitir que, durante a passagem de uma onda sonora, o gás não sofre aquecimento, i.e. a transformação (não) é <u>isotérmica</u>.

Determinação da velocidade do som (choque adiabático)

- Vamos proceder ao cálculo da velocidade do som supondo que o gás sofre uma transformação adiabática (i.e. $Q = 0$) durante a passagem do som
- Essa suposição é excelente porque a passagem do som é rápida o suficiente para que não haja trasmissão de calor

Choque adiabático:

$$PV^{\gamma} = \text{cte.}$$

Diferenciamos a equação acima:

$$dPV^{\gamma} + P\gamma V^{(\gamma-1)}dV = 0$$

Vamos calcular o módulo de elasticidade volumar:

$$B = -\frac{dP}{dV/V}$$

$$dP = -\frac{P\gamma V^{(\gamma-1)}dV}{V^\gamma} = -P\gamma V^{(\gamma-1-\gamma)}dV = -\gamma\frac{P}{V}dV$$

O módulo de elasticidade volumar é obtido dividindo-se o resultado acima por $-dV/V$:

$$B = -\frac{dP}{dV/V} = \left(\gamma\frac{P}{V}dV\right) / \left(dV/V\right) = \gamma P$$

Já mostramos que $P = \rho RT/M$, logo:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma\rho RT}{M\rho}}$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

γ é a razão c_p/c_v, que vale 1,4 para gases diatômicos. Ao extrair-se a raiz quadrada obtém-se um resultado 1,2 vezes maior (20%) que aquele obtido considerando-se um choque isotérmico.

Exemplo: calcule a velocidade do som no ar, considerando uma temperatura de 27^{o}C e que sua massa molecular seja de 28,97 g/mol.

Sol.: inicialmente convertemos a temperatura para K:

$$T = 27 + 273 = 300 \text{ K}$$

A massa molecular deve ser convertida para kg:

$$V = \text{sqrt}(1{,}4 \text{ x } 8{,}31 \text{ J/mol x } 300 \text{ K / } 28{,}97 \text{ x } 10^{-3} \text{ kg/mol})$$

$$V = 347{,}1 \text{ m/s}$$

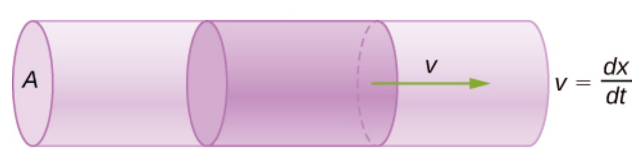
A velocidade do som em alguns meios materiais:

Meio	Velocidade (m/s)
Gases:	
Ar a $0^{o}C$	331
Ar a $20^{o}C$	343
Líquidos	
Água a $0^{o}C$	1402
Água a $20^{o}C$	1482
Água do mar*	1522
Sólidos:	
Alumínio	6420
Aço	5941
Granito	6000

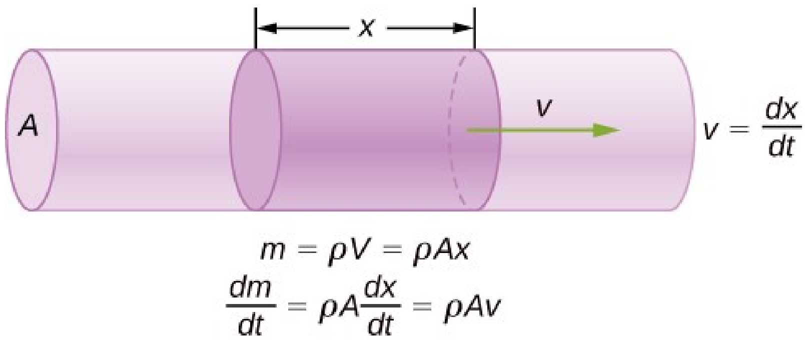
* a $20^{o}C$ e 3,5% de salinidade; sempre à pressão de 1 atm

Intensidade sonora

- Vamos calcular a <u>intensidade de uma onda sonora</u>
- Definimos intensidade como a <u>potência transmitida por unidade de área</u>
- Consideramos inicialmente um pequeno volume retilíneo dentro do qual o ar oscila “para frente e para trás” quando a onda sonora passa
- Consideremos também que a onda seja harmônica



- A velocidade de oscilação das moléculas devido à passagem da onda sonora pode ser obtida derivando-se a equação de uma onda harmônica:



$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[x_{\mathrm{m}} \sin(kx - \omega t)]$$

$$v_x = -\omega x_{\mathrm{m}} \cos(kx - \omega t)$$

A energia cinética de um elemento de volume dV e massa dm é:

$$E_{\mathrm{cin}} = \frac{1}{2}(dm)v_x^2 = \frac{1}{2}(\rho A dx)[-\omega x_{\mathrm{m}} \cos(kx - \omega t)]^2$$

- A energia cinética varia com $cos^2(kx - \omega t)$, porém na média o valor transmitido equivale à energia cinética máxima (energia potencial nula) ou potencial máxima (energia cinética nula), i.e. em qualquer oscilador harmônico:

$$\langle E_{cin} \rangle = \langle E_{pot} \rangle = \frac{1}{2} k\, x_m^2 = \frac{1}{2} m\, v^2$$

- Portanto o termo $cos^2(kx - \omega t)$ não importa para a taxa de propagação de energia da onda, e sim a amplitude x_m da oscilação.

$$\frac{dE_{\text{cin}}}{dt} = \frac{1}{2}\rho A \frac{dx}{dt}\omega^2 {x_{\text{m}}}^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

onde $v = dx/dt$ é a velocidade da onda. Dividimos a expressão anterior por A para obter a taxa de transmissão de energia por unidade de área:

$$I = \frac{1}{A} < \frac{dE_{\text{cin}}}{dt} >= \frac{1}{2}\rho v \omega^2 {x_{\text{m}}}^2$$

onde x_{m} é a amplitude de oscilação da onda longitudinal, ω é a sua frequência angular, v é a velocidade da onda e ρ é a densidade do meio.

$$\frac{dE_{\mathrm{cin}}}{dt} = \frac{1}{2}\rho A \frac{dx}{dt}\omega^2 {x_{\mathrm{m}}}^2 \cancel{\cos^2(kx - \omega t)}$$

onde $v = dx/dt$ é a velocidade da onda. Dividimos a expressão anterior por A para obter a taxa de transmissão de energia por unidade de área:

$$I = \frac{1}{A} < \frac{dE_{\mathrm{cin}}}{dt} >= \frac{1}{2}\rho v \omega^2 {x_{\mathrm{m}}}^2$$

onde x_{m} é a amplitude de oscilação da onda longitudinal, ω é a sua frequência angular, v é a velocidade da onda e ρ é a densidade do meio.

Exemplo: calcule a amplitude de oscilação das moléculas do ar quando a intensidade da onda sonora é de 1 W/m^2, para uma frequência de 220 Hz.

Dado: densidade do ar a 1 atm e 15^{o}C: ρ = 1,22 kg/m^3

Sol.: utilizamos a expressão que obtivemos anteriormente:

$$I = \tfrac{1}{2}\, \rho\, v\, \omega^2\, x_m^{\ 2}$$

$$x_m^{\ 2} = 2\, I\, /\, (\rho\, v\, \omega^2) = (2 \text{ x } 1)\, /\, (1{,}22 \text{ x } 340 \text{ x } (2\pi\ 220)^2)$$

$$x_m = 0{,}050 \text{ mm} = 50\ \mu\text{m}$$

Nível sonoro

- A sensação percebida pelo ouvido é logarítimica. Os sons mais fracos percebidos pelo ouvido humano têm intensidade 10^{-12} W/m^2 e os mais intensos (limiar doloroso) 1 W/m^2.
- Costuma-se expressar a intensidade sonora como nível sonoro (β), em escala logarítimica. Por definição, tem-se:

$$\beta = \log (I/I_o) \text{ (Bell)}$$

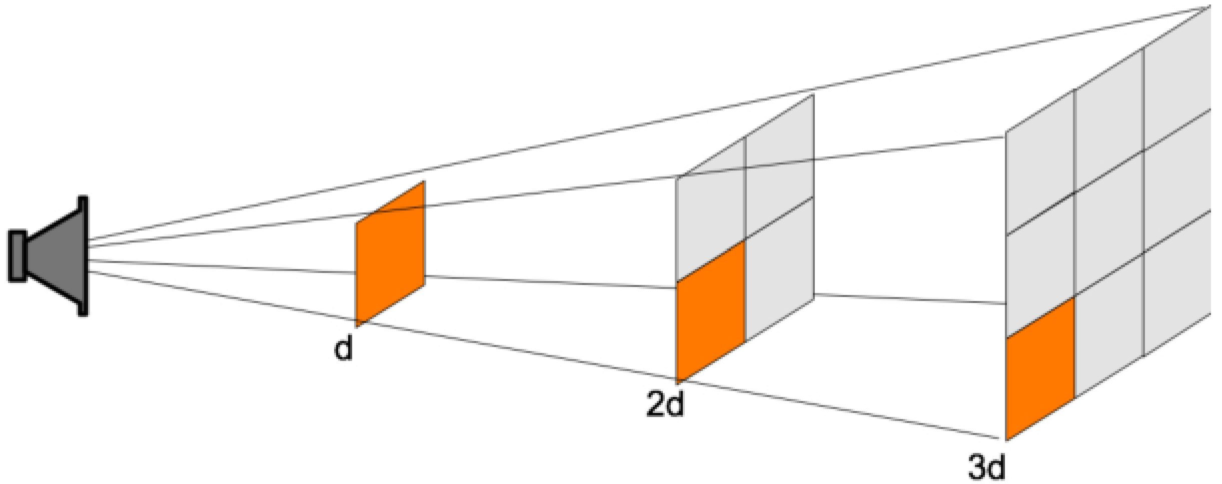
Onde I_o é uma intensidade de referência, considerada o limiar de detecção do ouvido humano, igual a 10^{-12} W/m^2.

- A "unidade" de β é o Bell. Mais frequentemente utiliza-se o decibel:

$$\beta = 10 \log (I/I_o) \quad \text{(decibel)}$$

Propagação do som no ar

- Diz-se que uma fonte sonora se propaga isotropicamente quando o som é emitido com igual intensidade em todas as direções.
- Desta forma, a intensidade diminui com o quadrado da distância, ou seja: $I \sim d^{-2}$



Exemplo: Um ouvinte está localizado a uma distância de 10 metros de um palco, onde percebe o som de uma banda com intensidade de 100 dB. Calcule a intensidade percebida por esse ouvinte, caso ele se desloque a uma distância de 50 metros. Considere que a propagação do som seja isotrópica.

Sol.: Sejam I_{10} e I_{50} as intensidades percebidas pelo ouvinte à distância de 10 e 50 metros, respectivamente. Pela lei do quadrado da distância temos:

$$I_{10} / I_{50} = (10 / 50)^{-2} = 5^2 = 25$$

Vamos calcular a intensidade I_{10}, em W/m^2:

$$10 \log (I_{10}/I_o) = 100$$

$$10 [\log (I_{10}) - \log (10^{-12})] = 100$$

$$\log I_{10} = (100 - 120) / 10 = - 20/10 = -2$$

Temos portanto que a intensidade percebida à distância de 10 metros é de 10^{-2} W/m^2.

Já calculamos que a intensidade percebida à distância de 50 metros é 25 vezes menor, i.e.:

$$I_{50} = I_{10} / 25 = (10^{-2} / 25) \quad \text{W/m}^2$$

Vamos agora calcular o nível sonoro a 50 metros:

$$\beta_{50} = 10 \log [(10^{-2} / 25) / 10^{-12}]$$

$$\beta_{50} = 10 [\log (10^{-2}) - \log (25) - \log (10^{-12})]$$

$$\beta_{50} = 10 [-2 -1{,}4 - (- 12)] = \mathbf{86\ dB}$$

Fonte de ruído	Nível (dB)	Descrição
Decolagem de avião	150	
Britadeira	130	
Motor a jato (a 60 m)	120	limiar doloroso
Construção civil	110	
Metrô	100	
Caminhão pesado	90	exposição constante prejudica a audição
Fábrica em geral	80	
Tráfego pesado	70	
Conversação normal (a 1 metro)	60	
Escritório tranquilo	50	silencioso
Biblioteca	40	
Murmúrio (a 5 metros)	30	
Folhas caindo	20	
Respiração normal	10	

Frequências

- Chamamos de som às ondas mecânicas audíveis cuja frequência está entre 20 e 20 000 Hz
- Quando transmitidas através do ar, as frequências correspondem ($\lambda f = 340$ m/s) a comprimentos de onda entre 1,7 cm e 17 m.
- Ondas com $f < 20$ Hz são infrasons, são percebidas pelo corpo, mas inperceptíveis ao ouvido. Podem ser gerados por terremotos, tempestades, impactos, etc.
- Ondas com $f > 20\,000$ Hz são ultrasons. São frequentemente usados em Medicina.

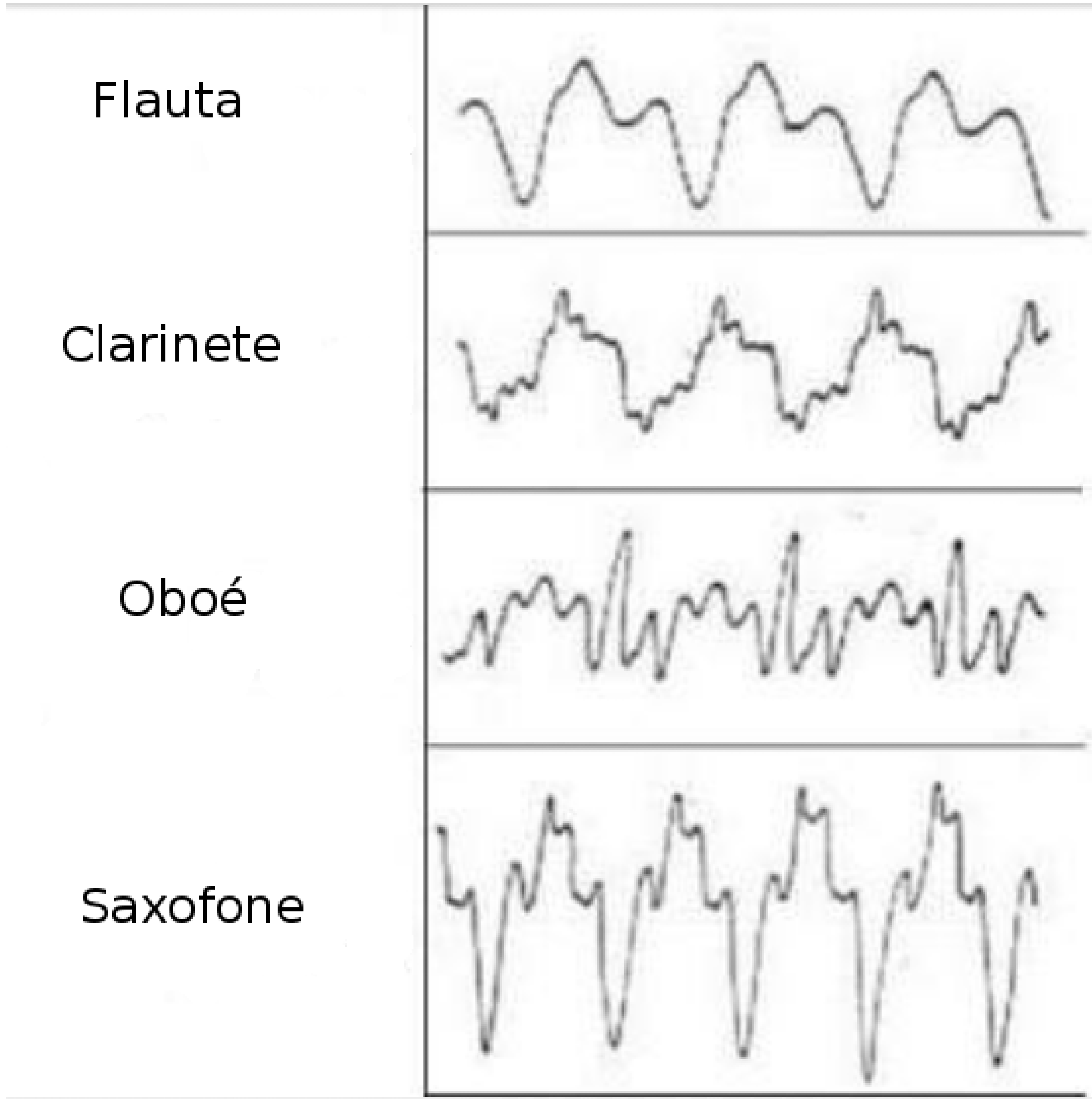
Frequências do cotidiano e em música

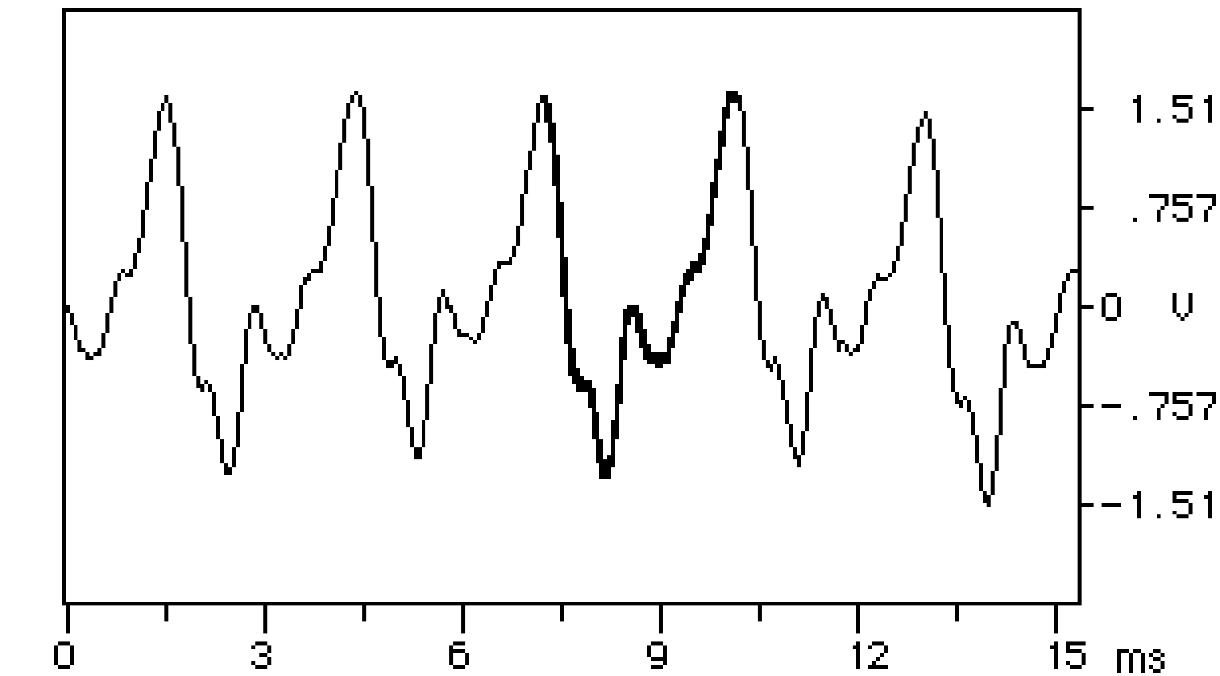
As frequências audíveis ao ouvido humano estão entre 20 e 20 000 Hz. Os intervalos abaixo são aproximados.

Emissor	**Intervalo musical**	**Intervalo de frequências (Hz)**
violino	sol3 – sol6	196 – 1568
viola	do3 – do6	131 – 1047
violoncelo	do2 – do5	65 – 523
contrabaixo (5 cordas)	si0 – sol4	31 – 392
soprano	la3 – la5	220 – 880
contralto	mi3 – mi5	165 – 659
tenor	si2 – la4	123 – 440
baixo	mi2 – mi4	82 – 330

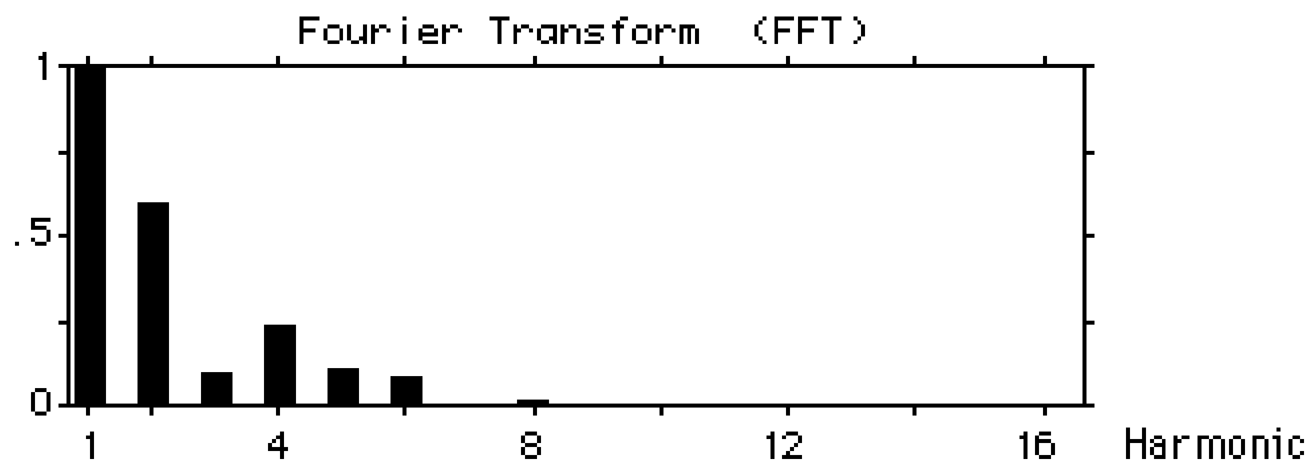
Timbres

- Chamamos de <u>timbre</u> à “coloração” ou “aspecto” de um som. Diferentes instrumentos, ao produzirem a mesma nota, possuem diferentes timbres
- É o <u>timbre</u> que nos permite diferenciar as diferentes fontes sonoras, e não as suas frequências
- O timbre é o resultado da intensidade dos diferentes harmônicos que compõem uma onda (veja a aula sobre séries de Fourier)


Flauta
Clarinete
Oboé
Saxofone

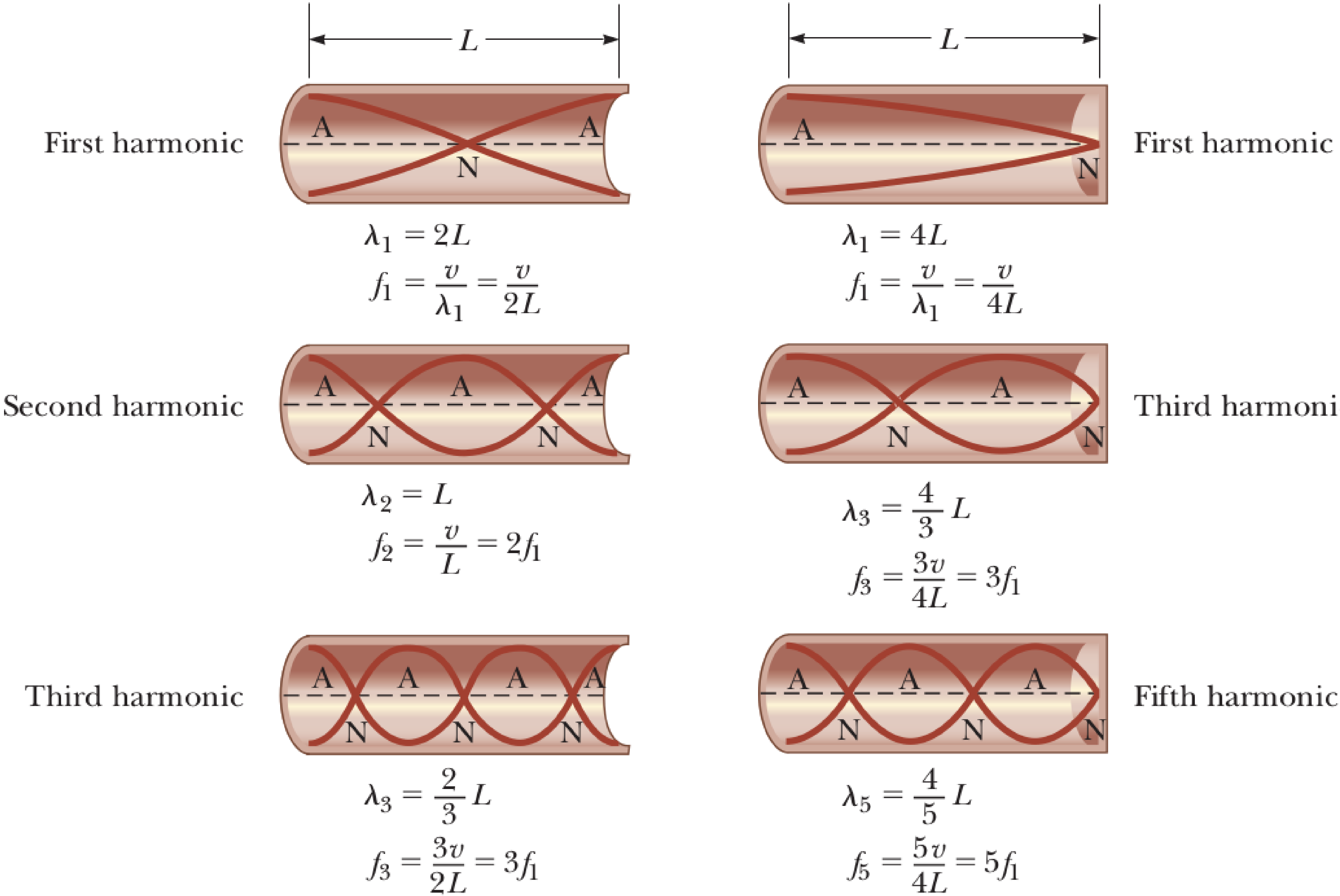


Harmonic	Amplitude
1	1.00
2	.61
3	.10
4	.24
5	.11
6	.09
7	.00
8	.02
9	.00
10	.00
11	.01
12	.00



Ondas estacionárias em um tubo

- Os sons produzidos por instrumentos de sopro são gerados pela vibração da palheta, que é uma peça por onde sopra o músico.
- A palheta faz vibrar o ar no interior do tubo.
- A vibração do ar no interior do tubo gera uma onda estacionária, semelhante àquela gerada por instrumentos de corda.
- Alguns instrumentos possuem tubos abertos em ambas as extremidades; outros podem possuir uma extremidade fechada.



L
L
First harmonic
A
A
N
$\lambda_1 = 2L$
$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}$
A
N
First harmonic
$\lambda_1 = 4L$
$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{4L}$
Second harmonic
A
A
A
N
N
$\lambda_2 = L$
$f_2 = \frac{v}{L} = 2f_1$
A
A
N
N
Third harmonic
$\lambda_3 = \frac{4}{3}L$
$f_3 = \frac{3v}{4L} = 3f_1$
Third harmonic
A
A
A
A
N
N
N
$\lambda_3 = \frac{2}{3}L$
$f_3 = \frac{3v}{2L} = 3f_1$
A
A
A
N
N
N
Fifth harmonic
$\lambda_5 = \frac{4}{5}L$
$f_5 = \frac{5v}{4L} = 5f_1$

Batimentos

- O fenômeno é produzido ao combinar-se duas frequências muito próximas
- Sejam ω_1 e ω_2 as frequências angulares de duas fontes sonoras percebidas por um ouvinte. Elas têm a mesma amplitude x_m.

$$x_1 = x_m \cos(\omega_1 t) \text{ e } x_2 = x_m \cos(\omega_2 t)$$

$$x = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x = x_m (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t))$$

- Utilizamos a igualdade trigonométrica:

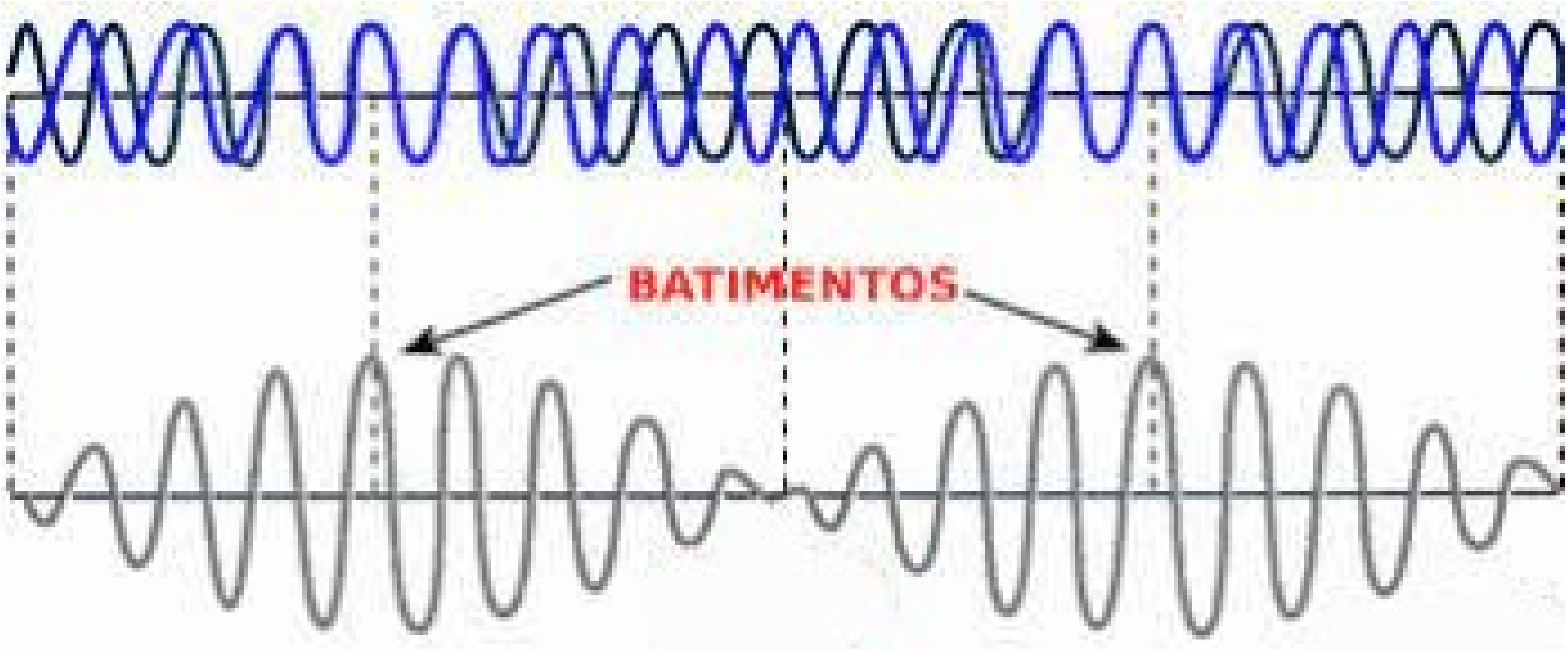
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\,[\,\cos(½\,(\alpha - \beta))\,\cos(½\,(\alpha + \beta))\,]$$

$$x(t) = 2\,x_m \cos(½\,(\omega_1 - \omega_2)t)\,\cos(½\,(\omega_1 + \omega_2)t)$$

Fazemos $\omega_d = ½\,(\omega_1 - \omega_2)$ e $\omega_m = ½\,(\omega_1 + \omega_2)$:

$$x(t) = 2\,x_m \cos(\omega_d t)\,\cos(\omega_m t)$$

A figura abaixo mostra duas ondas com frequências próximas



- A frequência angular da “onda resultante” é:

$$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

- A amplitude da “onda resultante” é <u>modulada</u> com uma frequência angular:

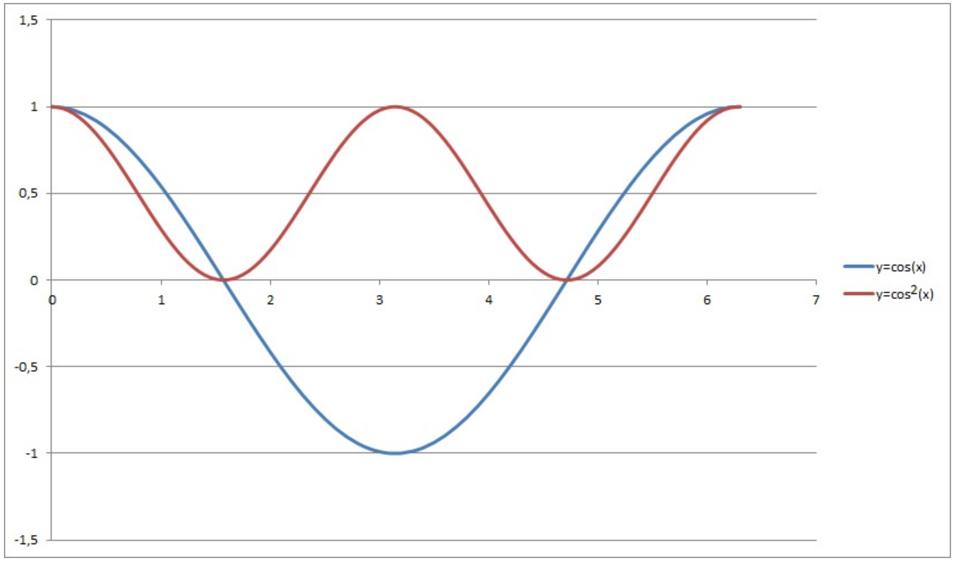
$$\omega_d = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$$

- No entanto, a frequência <u>ouvida</u> é proporcional a x_m^2 pois a intensidade sonora é:

$$I = \frac{1}{2} \rho\, v\, \omega^2 x_m^2$$

$$I = \frac{1}{2} \rho\, v\, \omega^2 [2\, x_m \cos(\omega_d t) \cos(\omega_m t)]^2$$

A função $\cos^2(\omega\, t)$ tem o dobro da frequência de $\cos(\omega\, t)$:



Logo, a frequência de modulação (batimento) da <u>intensidade sonora</u> percebida pelo ouvinte é:

$$\omega = 2 \text{ x } \omega_d = 2 \text{ x } (\tfrac{1}{2}\,(\omega_1 - \omega_2)) = \omega_1 - \omega_2$$

$$2\pi f = 2\pi f_1 - 2\pi f_2$$

$$f = f_1 - f_2$$

- Na prática, quando duas frequência próximas são emitidas ouve-se um som equivalente à frequência média, modulado por uma frequência igual à diferença entre as frequências individuais.

- A essa modulação de intensidade chamamos batimento.

- Essa técnica é muito utilizada para se afinar instrumentos musicais.

- Em telecomunicações, é utilizada quando se deseja baixar uma frequência que é demasiado alta. Soma-se a esta uma frequência gerada por um sintetizador que, quando combinada com a frequência original, gera uma frequência intermediária (F.I.) ou de batimento.

Fim