Fenomenologia das ondas II

Roberto Ortiz

Professor Livre-Docente
EACH – USP

Interferência de ondas em 2 e 3 dimensões

- Já estudamos como ondas com diferentes características (frequências, amplitudes) podem sofrer interferência em 1 dimensão.
- Um parâmetro importante a ser considerado é a <u>diferença de fase</u> δ, que pode ser:
  - δ constante quando a frequência e/ou a velocidade das ondas é a mesma

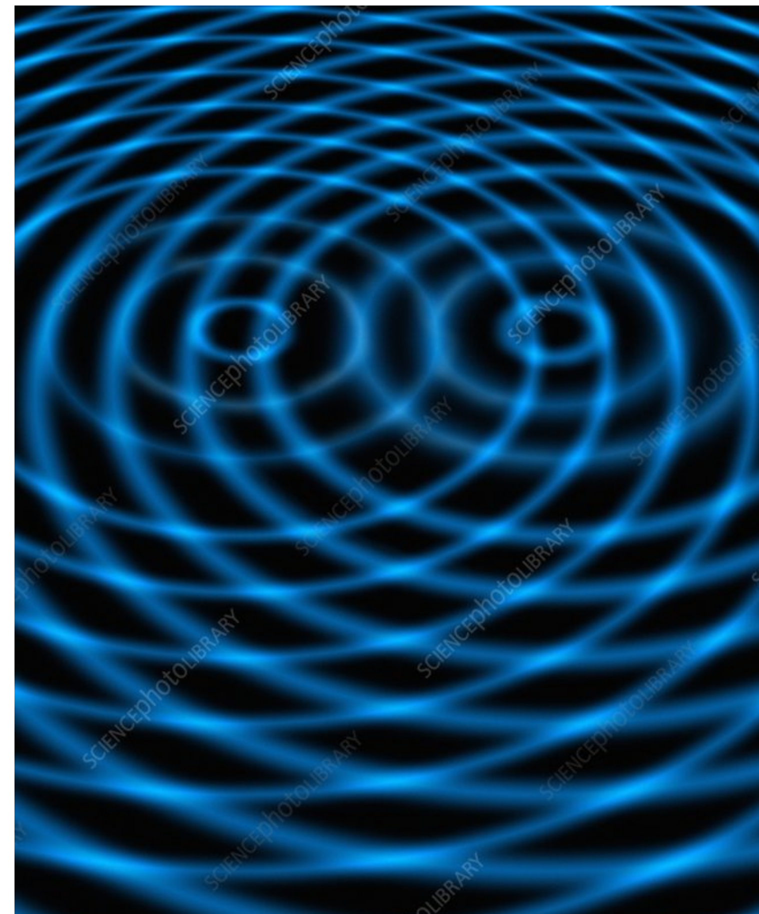
    ou
  - δ variável quando a frequência e/ou velocidade das ondas são variáveis
- Em 2 ou 3 dimensões uma diferença de fase surge quando há uma <u>diferença de trajetória</u> entre 2 ou mais ondas.

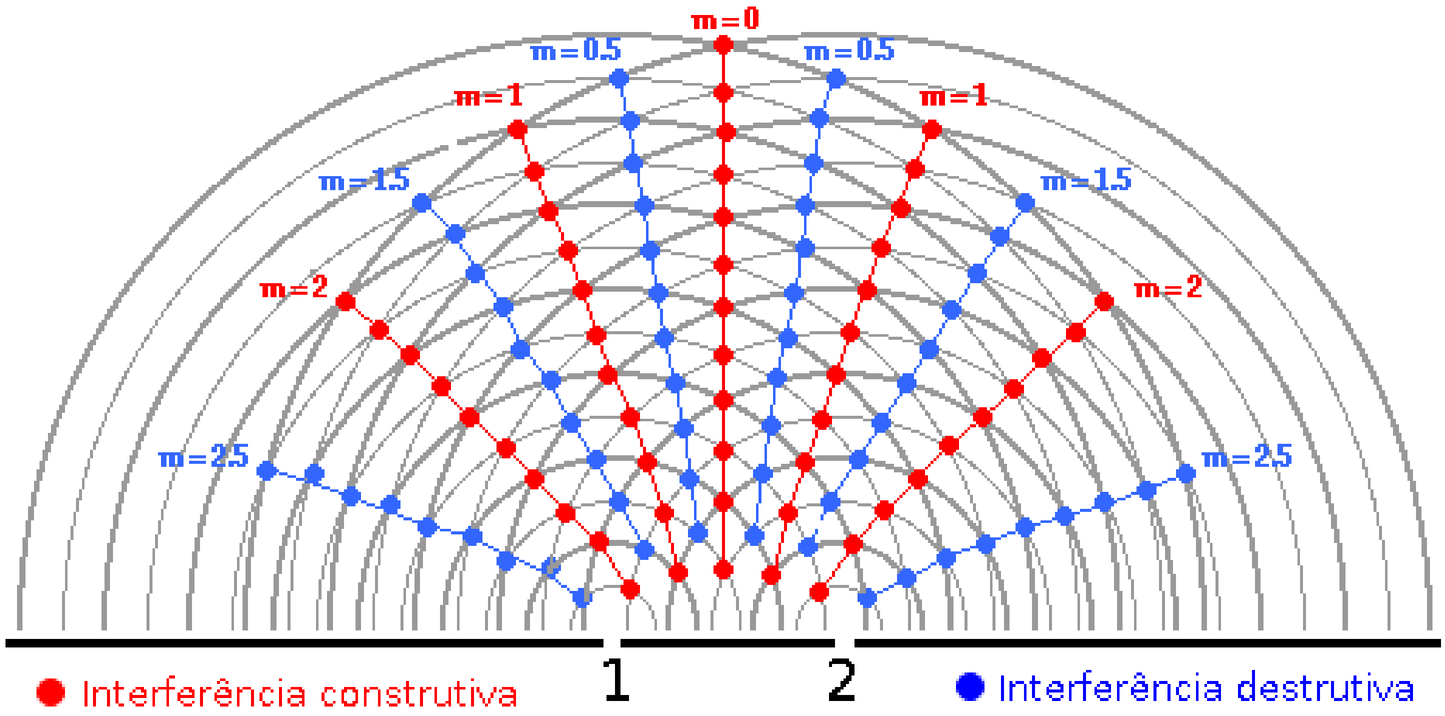
Interferência de ondas criadas por 2 fontes em 2 dimensões

- Considere as ondas criadas por 2 fontes oscilantes puntiformes, oscilando em fase com frequência *f*, separadas por uma distância *d*.
- Essas ondas se propagam com velocidade $v = \lambda f$
- À medida que se propagam haverá uma <u>interferência</u> entre as ondas criadas pelas duas fontes

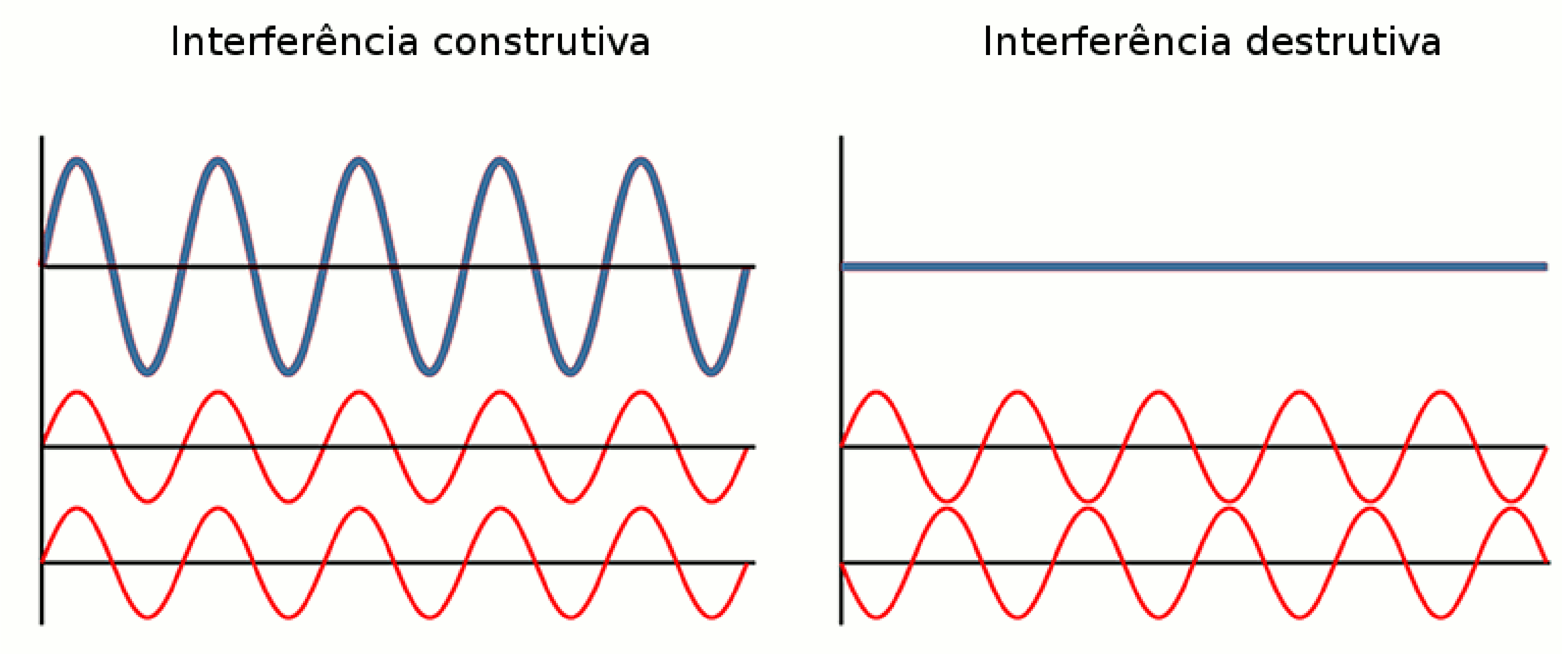
Interferência em 2 dimensões

- A figura ao lado ilustra o padrão de interferência criado pelas 2 fontes de ondas.
- Há lugares onde as duas ondas se somam (a fase das 2 ondas é a mesma ou múltiplos pares de π) e outros onde as ondas se anulam (a fase das 2 ondas difere múltiplos ímpares de π).
- A diferença de fase em cada ponto é resultado da <u>diferença de caminho</u> percorrido por cada onda.



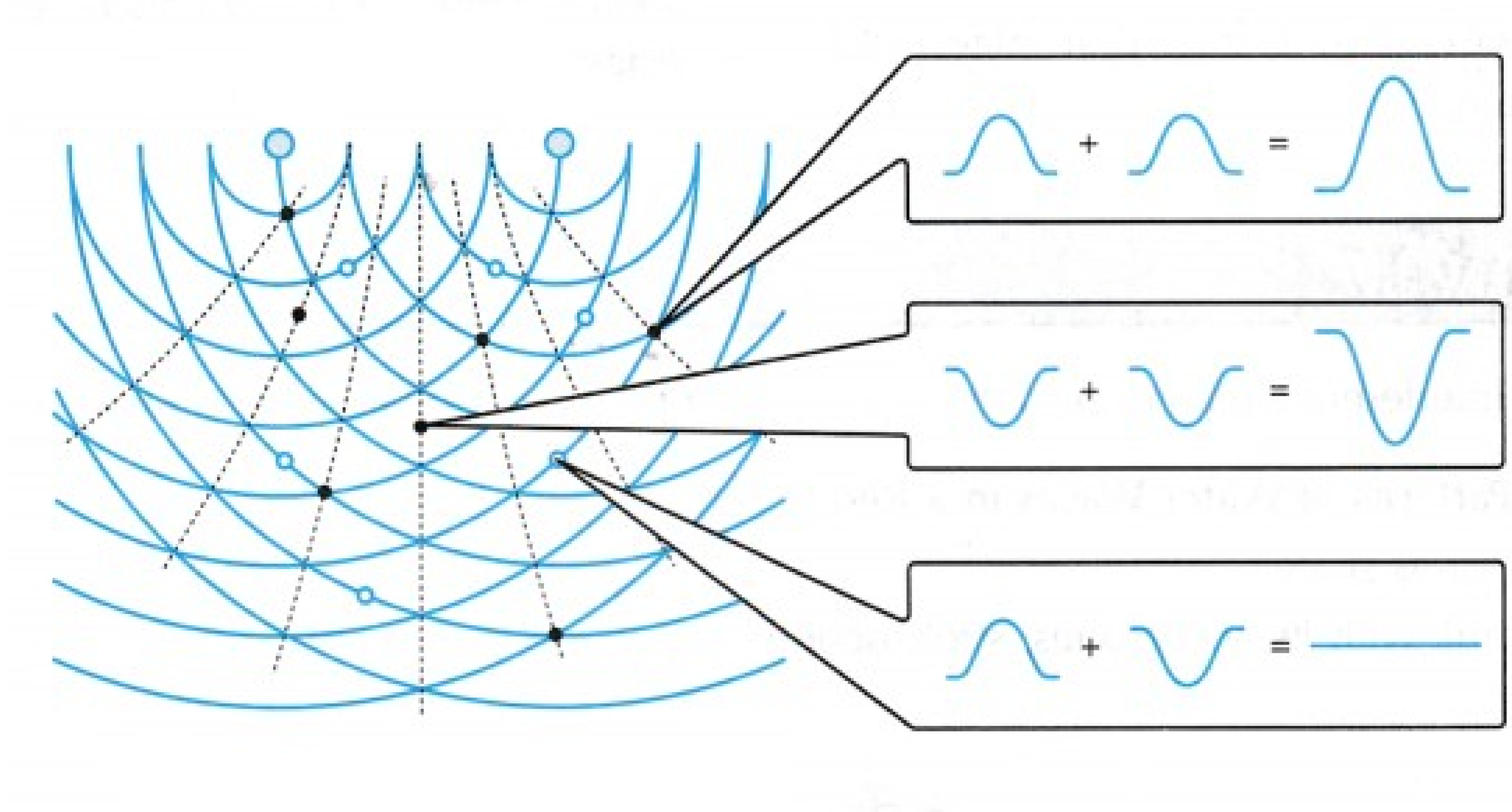


- Na figura acima as fontes geradoras de ondas estão localizadas em 1 e 2. Considere que essas pontos sejam “puntiformes”
- Os pontos coloridos assinalam os lugares onde a diferença de fase (causada pela diferença de distância das fontes) é igual a:
  - múltiplos pares de ½ λ (interferência construtiva) ou ainda: m λ = N λ
  - múltiplos ímpares de ½ λ (interferência destrutiva) ou ainda: m λ = (N + ½) λ



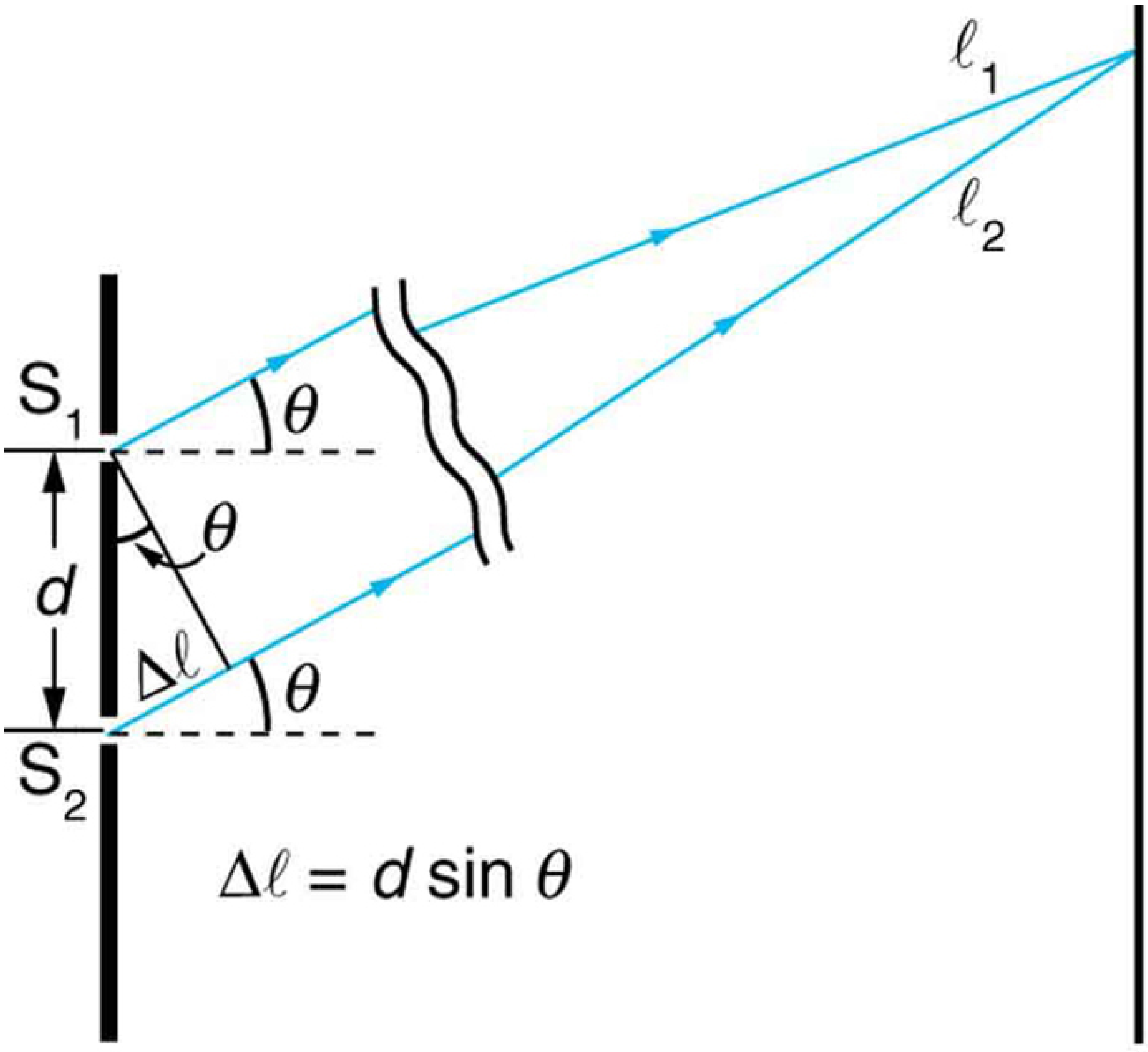
- Quando a <u>diferença de fase</u> entre as ondas é um <u>múltiplo par</u> (i.e. m = 0, 2, 4, 6, 8..) de π a interferência é <u>construtiva</u>
  - Este caso equivale a uma diferença de distância de m λ = *N* λ, *N* = 0,1,2,3...
- Quando a <u>diferença de fase</u> entre as ondas é um <u>múltiplo ímpar</u> (i.e. m = 1, 3, 5, 7, 9…) de π a interferência é <u>destrutiva</u>
  - Este caso equivale a uma diferença de distância de m λ = (*N* + ½) λ, *N*= 0,1,2,3...

Cálculo a posição dos pontos de interferência construtiva e destrutiva



A posição dos lugares de máximos e mínimos associados a uma determinada diferença de fase é rigorosamente uma <u>hipérbole</u>

Se considerarmos os lugares distantes dos pontos onde são geradas as ondas podemos fazer uma aproximação:

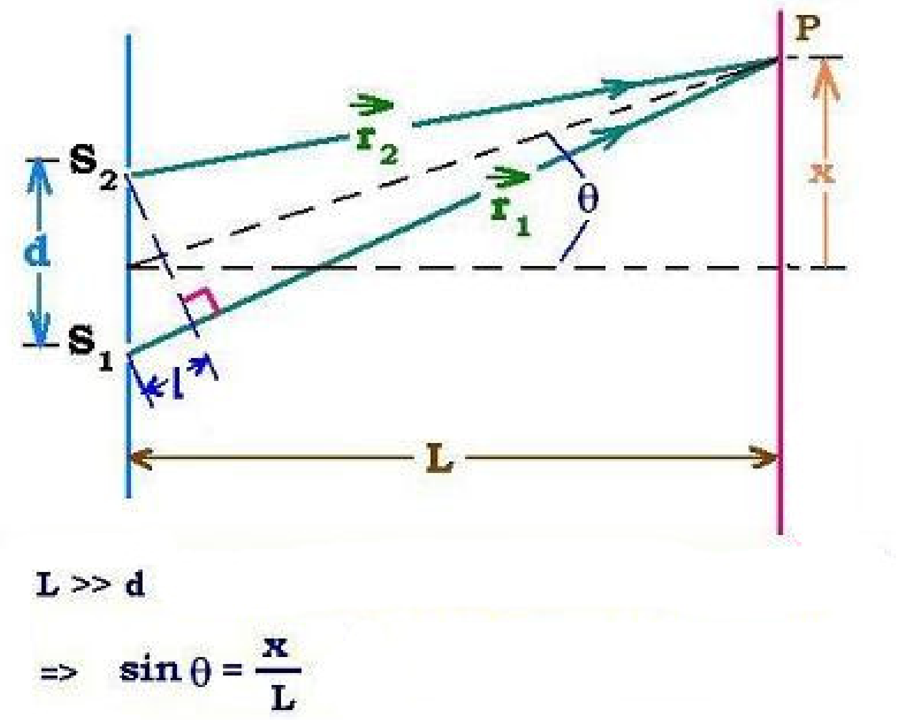


Posição x onde há <u>interferência construtiva</u>:

$d \sin \theta = N \lambda$

$d\,(x_{max} / L) = N \lambda$

$x_{max} = N\,(\lambda L / d)$



Posição x onde há <u>interferência destrutiva</u>:

$d \sin \theta = (N + ½)\,\lambda$

$d\,(x_{min} / L) = (N + ½)\,\lambda$

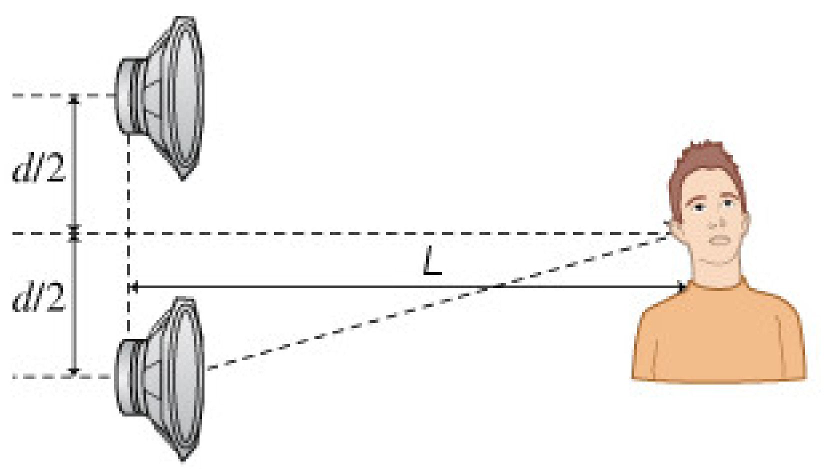
$x_{min} = (N + ½)\,(\lambda L / d)$

onde *N* é um inteiro (ou zero)

Exemplo: você se senta em um sofá, equidistante de 2 auto-falantes que emitem, em fase, um sinal sonoro com frequência *f* de 4000 Hz. A distância *d* entre os dois auto-falantes é de 1 metro e sua distância *L* até a linha imaginária que os une é de 5 metros.

(a) calcule quanto você deve se deslocar lateralmente de modo que perceba a primeira interferência destrutiva

(b) calcule quanto você de se deslocar lateralmente de modo que perceba a primeira interferência construtiva



<u>Sol</u>.: o primeiro ponto de interferência construtiva (N = 1) está situado a uma distância de 1 (λ L / d) à direita ou à esquerda do eixo de simetria do conjunto. Devemos portanto calcular o comprimento de onda. Se utilizarmos v_{som} = 340 m/s obtemos:

$\lambda = v_{som} / f = 340 \text{ (m/s)} / 4000 = 0{,}085 \text{ m}$

Logo: $x_{max}(N = 1) = 0{,}085 \times 5 / 1{,}0 = 0{,}425 \text{ m} =$ **42,5 cm**

o primeiro ponto de interferência destrutiva (N = 0) está situado a uma distância de (0 + ½) (λ L / d) à direita ou à esquerda do eixo de simetria do conjunto:

$x_{min} (N = 0) = ½ \times (0{,}085 \times 5 / 1{,}0) = 0{,}2125 \text{ m} =$ **21,25 cm**

Gráfico da intensidade da onda em função da posição *x*

- Vamos calcular a intensidade da onda em função da posição *x*, contada a partir do ponto médio entre as duas fontes, a uma distância L.

- Supomos que cada fonte seja puntiforme e que gere uma onda com amplitude $\boldsymbol{A_o}$.

- Quando a interferência é <u>construtiva</u> a onda resultante terá amplitude $\boldsymbol{2A_o}$

- Quando a interferência é <u>destrutiva</u> a onda resultante terá amplitude <u>zero</u>.

- Nos demais casos, a amplitude dependerá da <u>diferença de fase</u> δ entre as duas ondas.

- Cálculo da <u>diferença de fase</u> δ:

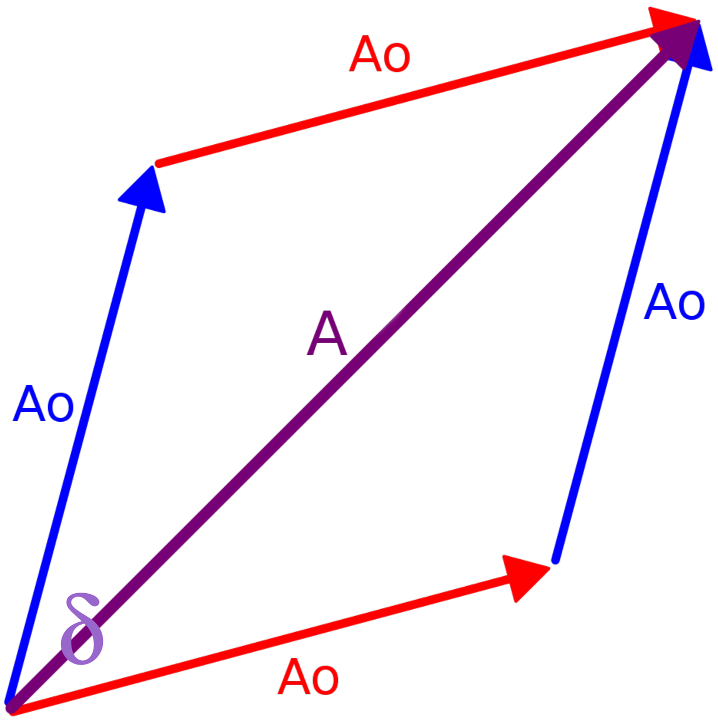
$$\delta = (\text{diferença de caminho / comprimento de onda}) \times 2\pi$$

$$\delta = (d \sin\theta / \lambda) \,.\, 2\pi = 2\pi\,(x\, d / L\, \lambda)$$

- Cálculo da <u>amplitude combinada</u> *A* em função de δ:

A frequência das ondas individuais é a mesma. Utilizamos a técnica de <u>fasores</u> para calcular a amplitude *A* resultante , que é a <u>soma fasorial</u> de duas amplitudes A_o defasadas de δ.

Na figura ao lado os fasores de módulo A_o, iguais, estão defasados de um ângulo δ. Utilizamos a lei dos cosenos para calcular o fasor resultante, A:



$$A^2 = A_o^2 + A_o^2 + 2A_o^2 \cos \delta$$

$$A^2 = 2A_o^2 + 2A_o^2 \cos \delta$$

$$A^2 = 2\, A_o^2\, (1 + \cos \delta)$$

$$\cos\delta = \cos\left(\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{\delta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

$$\cos\delta = \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) - \left(1 - \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)$$

$$\cos\delta = \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) - 1 + \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) - 1$$

$$A^2 = 2A_\circ^2(1+\cos\delta)$$

$$A^2 = 2A_\circ^2\left(1 + 2\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) - 1\right)$$

$$A^2 = 4A_\circ^2\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

$$A^2 = 4A_\circ^2\cos^2\left(\frac{\pi x d}{L\lambda}\right)$$

Já vimos anteriormente que a intensidade da onda é proporcional à amplitude da onda (resultante) ao quadrado, que acabamos de calcular.

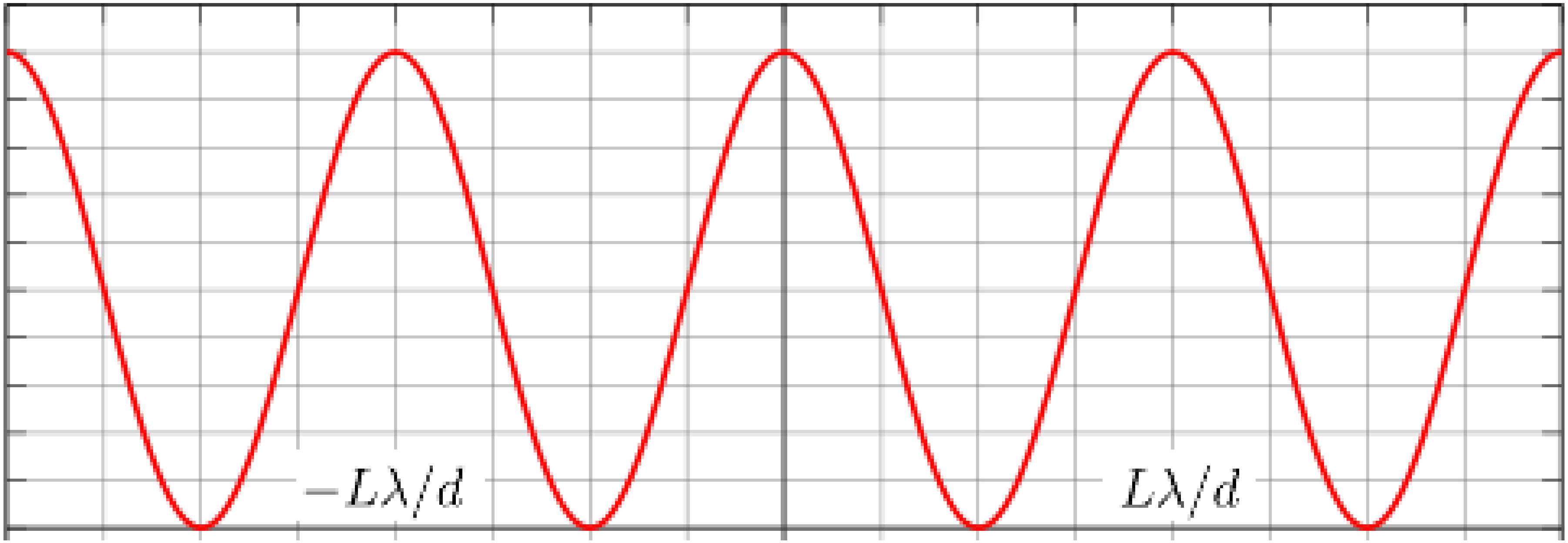
A intensidade é máxima onde o $\cos^2$ é máximo, ou seja, onde o seu argumento é igual a ($N\,\pi$) e $N = 0, 1, 2, 3...$:

$$\pi\, x_{max}\, d / L\, \lambda = N\, \pi$$

$$x_{max} = N\, L\, \lambda / d,$$

conforme já havíamos calculado antes.

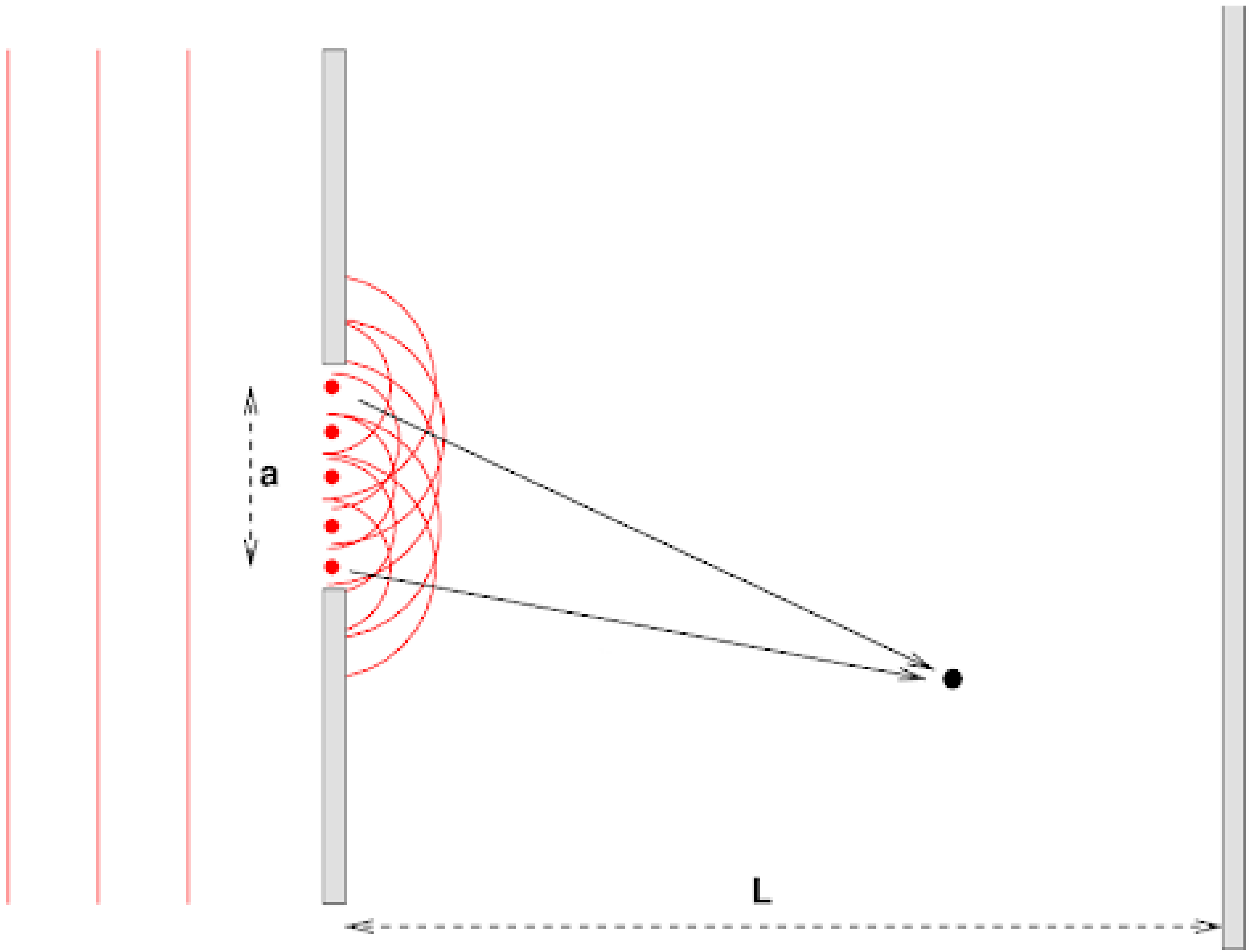
Por outro lado agora obtivemos que a função que descreve a intensidade da onda resultante da interferência: é da forma de um $\cos^2$.



Em 1801, Thomas Young utilizou um experimento de dupla-fenda semelhante ao descrito acima para comprovar o caráter ondulatório da luz.

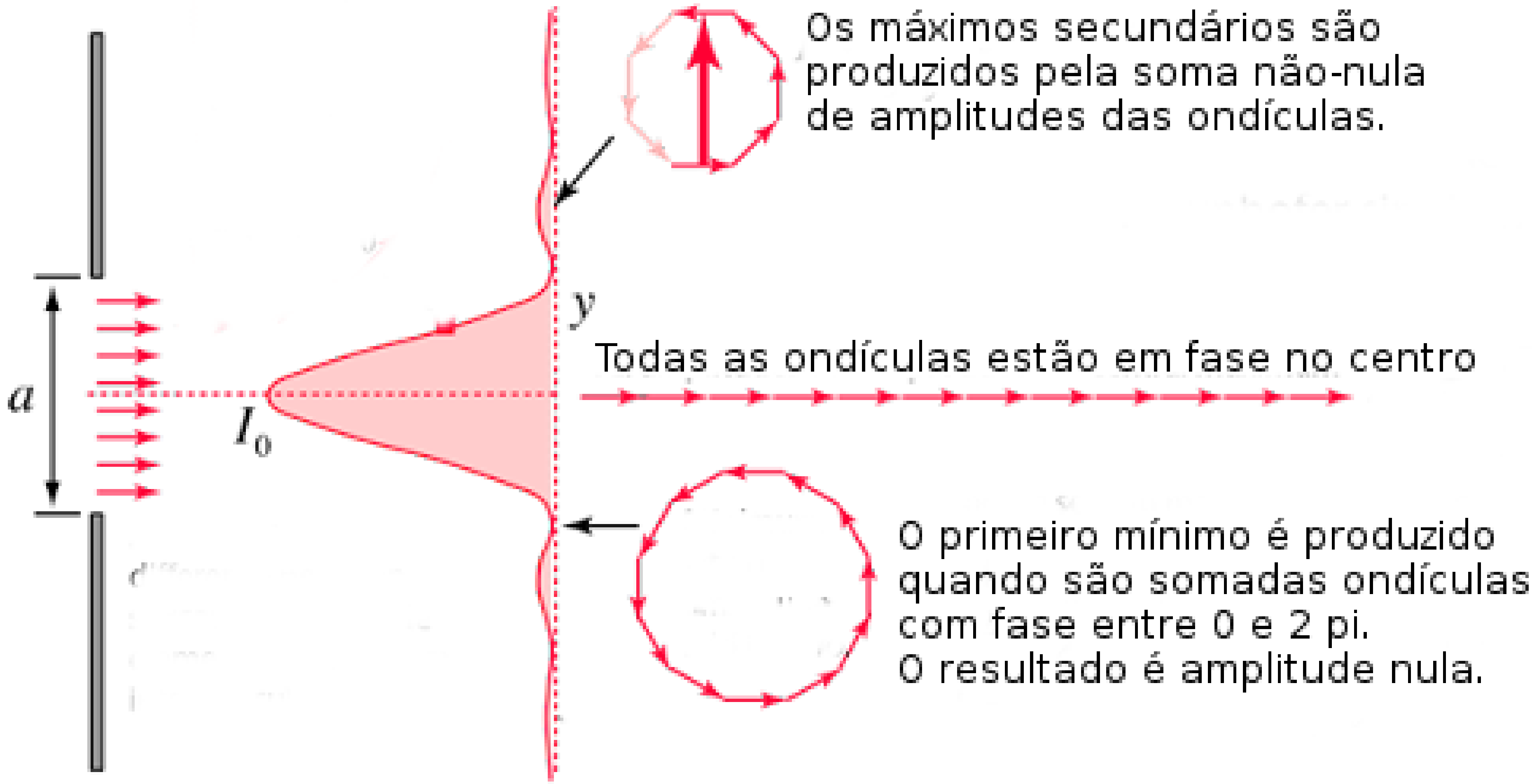
Difração em fenda única

- Conforme vimos, ondas planas, ao passar por uma abertura, sofrem difração.
- A difração pode ser entendida como uma consequência natural do Princípio de Huygens-Fresnel
- Vamos supor que a onda plana seja composta por um número finito de “ondículas” segundo o “Princípio de Huygens”.
- As ondículas estão distribuídas uniformemente ao longo da abertura
- Em seguida, vamos calcular a posição do primeiro mínimo de intensidade



a
L

Cálculo das posições dos máximos e mínimos



Primeiro mínimo:

- Ocorre quando a soma dos fasores que representam as ondículas é zero.
- A diferença de fase entre ondículas consecutivas é δ.
- Se houver N ondículas então $N \times \delta = 2\pi$
- Logo, a diferença de fase entre a primeira e a última ondícula deve ser 2π na direção do primeiro mínimo.
- Por consequência, a diferença de caminho deve ser de 1 λ

Posição dos mínimos:

- Primeiro mínimo:

  $a \sin \theta = \lambda$

  $a\ (x_{min} / L) = \lambda$

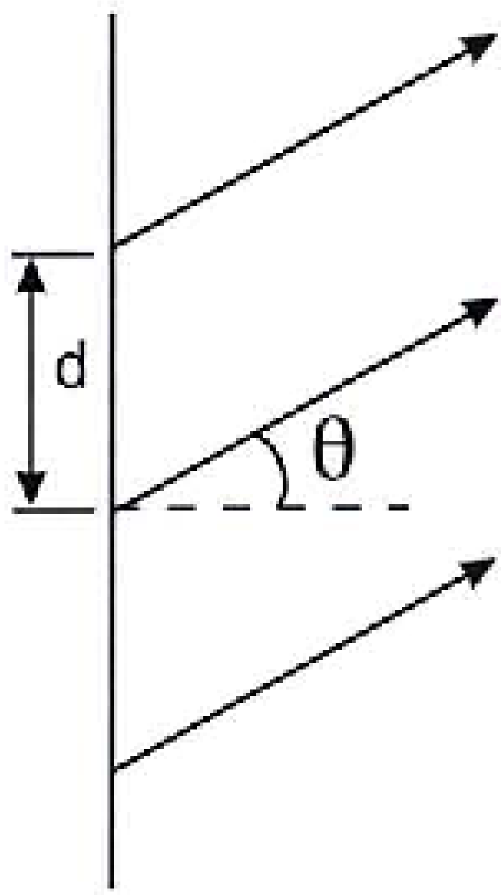
  $x_{min} = \lambda L / a$

  onde L é a distância entre a fenda e o ponto onde observamos a onda.

- Os demais mínimos: são obtidos fazendo a diferença de caminho $\Delta l = m \lambda$ ou:

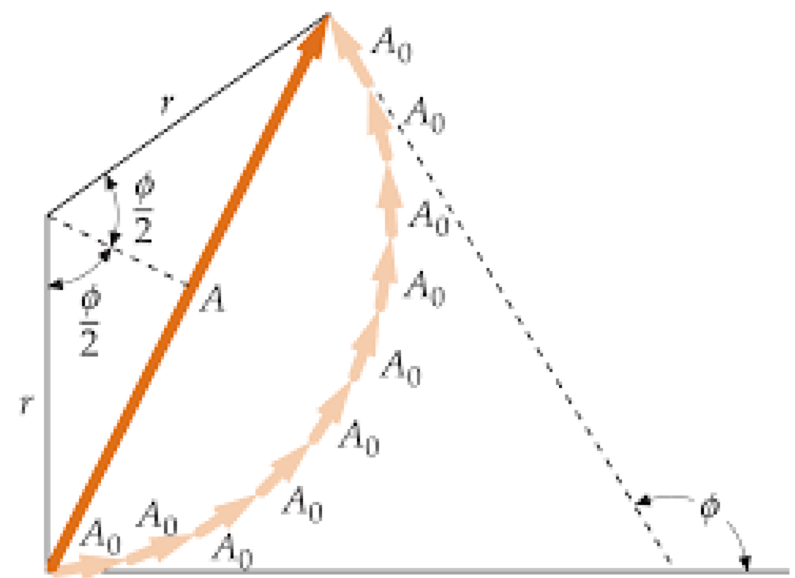
  $a \sin \theta = m \lambda$

  $x_{min} = m\ (\lambda L / a)$, m = 1, 2, 3...



Na figura, d é a distância entre ondículas adjacentes. O número total de ondículas é N e (N x d) = a = largura da fenda.

- Cálculo da intensidade em um ponto qualquer:
  - Somamos os fasores correspondentes a todas as ondículas que passam pela abertura. A diferença de fase entre ondículas adjacentes é δ.
  - A soma "fasorial" da contribuição das *N* ondículas, cada uma delas com amplitude A_o, é mostrada na figura abaixo:
  - A diferença de fase entre a primeira e a última ondícula é ϕ.



- Da figura anterior temos que:

$$\sin(\phi / 2) = (½)\, A / r$$

$$A(\phi) = 2\, r \sin(\phi / 2)$$

onde *r* é o raio do círculo e ϕ é a diferença de fase entre a primeira e a última ondícula. O valor de *r* pode ser calculado a partir do tamanho do arco de circunferência:

$$\phi = (N \times A_o) / r$$

$$r = (N \times A_o) / \phi$$

onde (N x A_o) é, obviamente, a amplitude máxima central = A_{max}. Em seguida, substituimos *r* na expressão de A(ϕ):

$$A(\phi) = 2\, r \sin(\phi / 2)$$

$$A(\phi) = 2\,(A_{max} / \phi) \sin(\phi / 2)$$

$$A(\phi) = A_{\max} \left(\frac{\sin(\phi/2)}{\phi/2} \right)$$

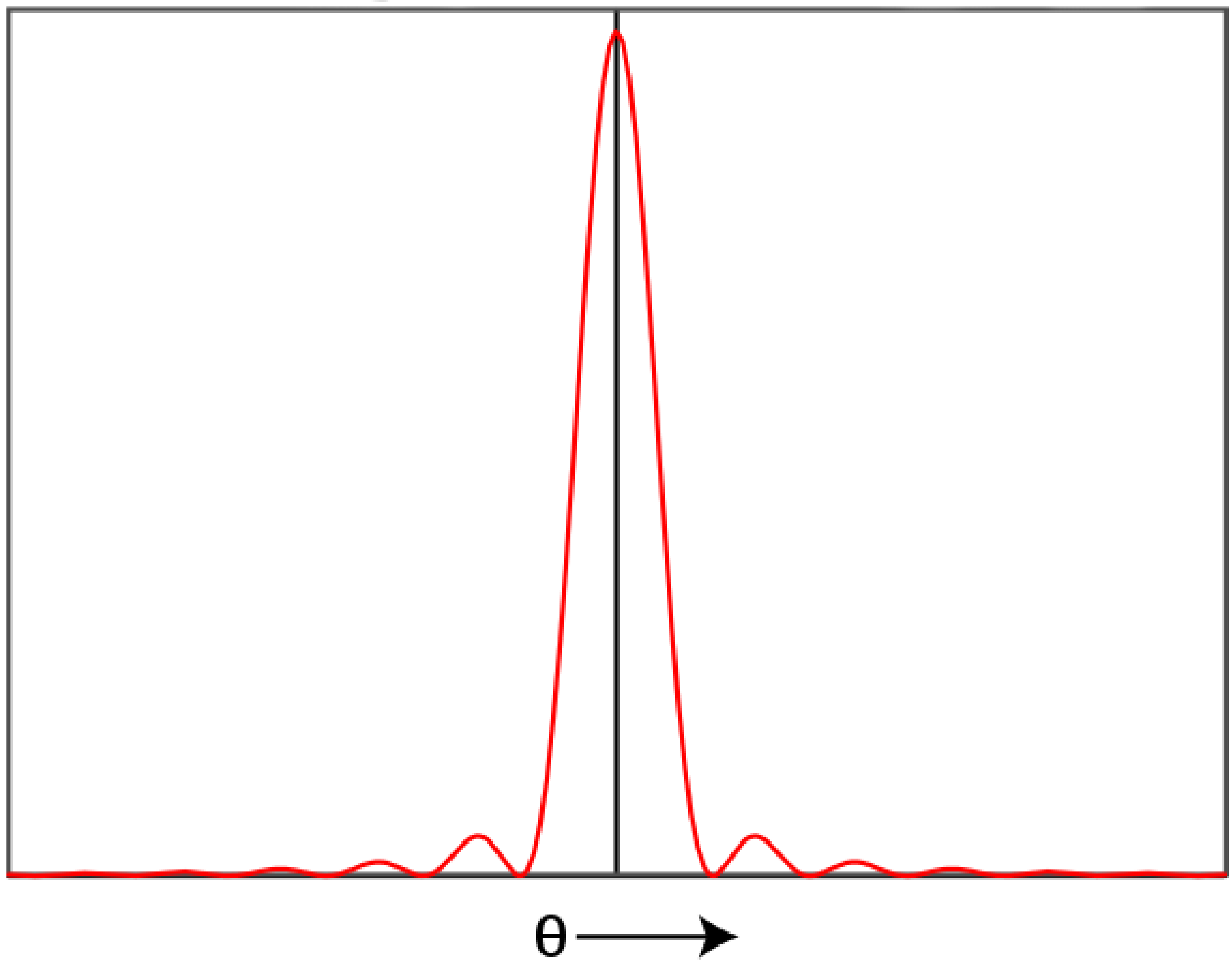
$$I(\phi) = I_{\max} \left(\frac{\sin(\phi/2)}{\phi/2} \right)^2$$

pois a intensidade *I* é proporcional ao quadrado da amplitude *A*.

O ângulo ϕ, que é a diferença de fase entre a primeira e a última ondícula pode ser calculado pela expressão:

$$\phi = 2\pi\,(a \sin\theta) / \lambda$$

Gráfico:



Exemplo: uma onda plana, de comprimento de onda 0,5 cm, incide perpendicularmente sobre uma fenda com 2 cm de largura.
(a) calcule a largura do máximo central de difração produzida pela fenda, quando observado a uma distância de 10 cm da fenda
(b) calcule a que distância do máximo central de intensidade estão os "segundos mínimos" de intensidade
(c) o que aconteceria com os resultados encontrados se observássemos a figura de difração a uma distância de 1,0 m de distância?

Sol.: **(a)** a primeira "interferência destrutiva" ocorrerá quando a diferença de caminho entre a primeira e a última "ondícula" for o equivalente a 1 comprimento de onda:

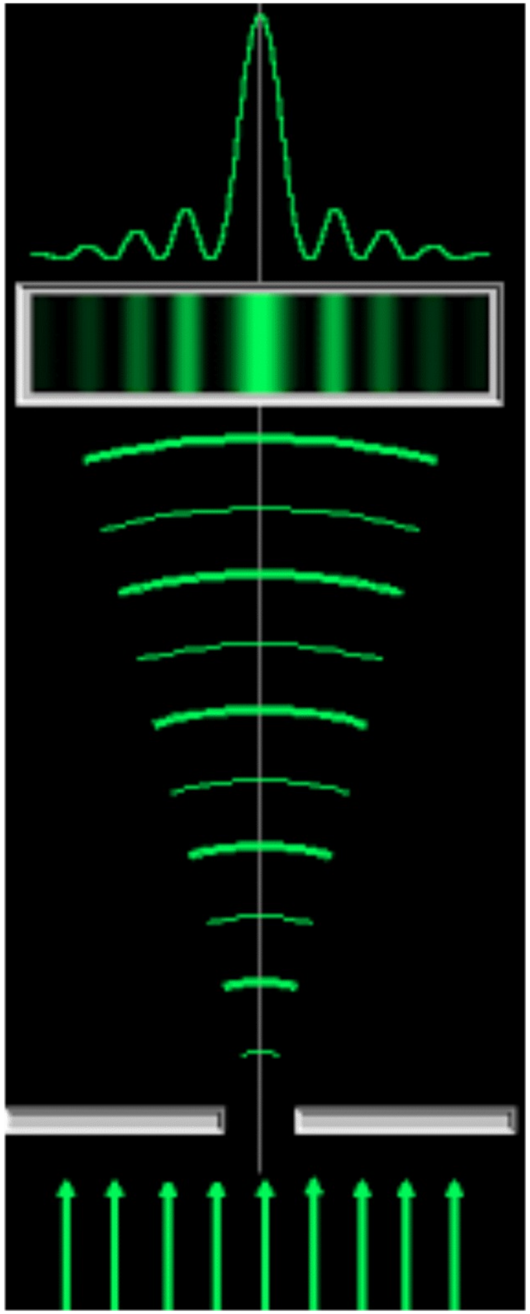
$$x_{min} = \lambda\, L \,/\, a = 0{,}5 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} / 2 \text{ cm} = 2{,}5 \text{ cm}$$

Logo, a largura total é igual a 2 vezes este valor: 2 x 2,5 cm = 5 cm.

(b) o segundo mínimo de intensidade:

$x_{min} = m\ (\lambda\ L\ /\ a)$, fazendo m = 2:

$x_{min} = 2\ (0{,}5 \times 10\ /\ 2) = 5{,}0$ cm

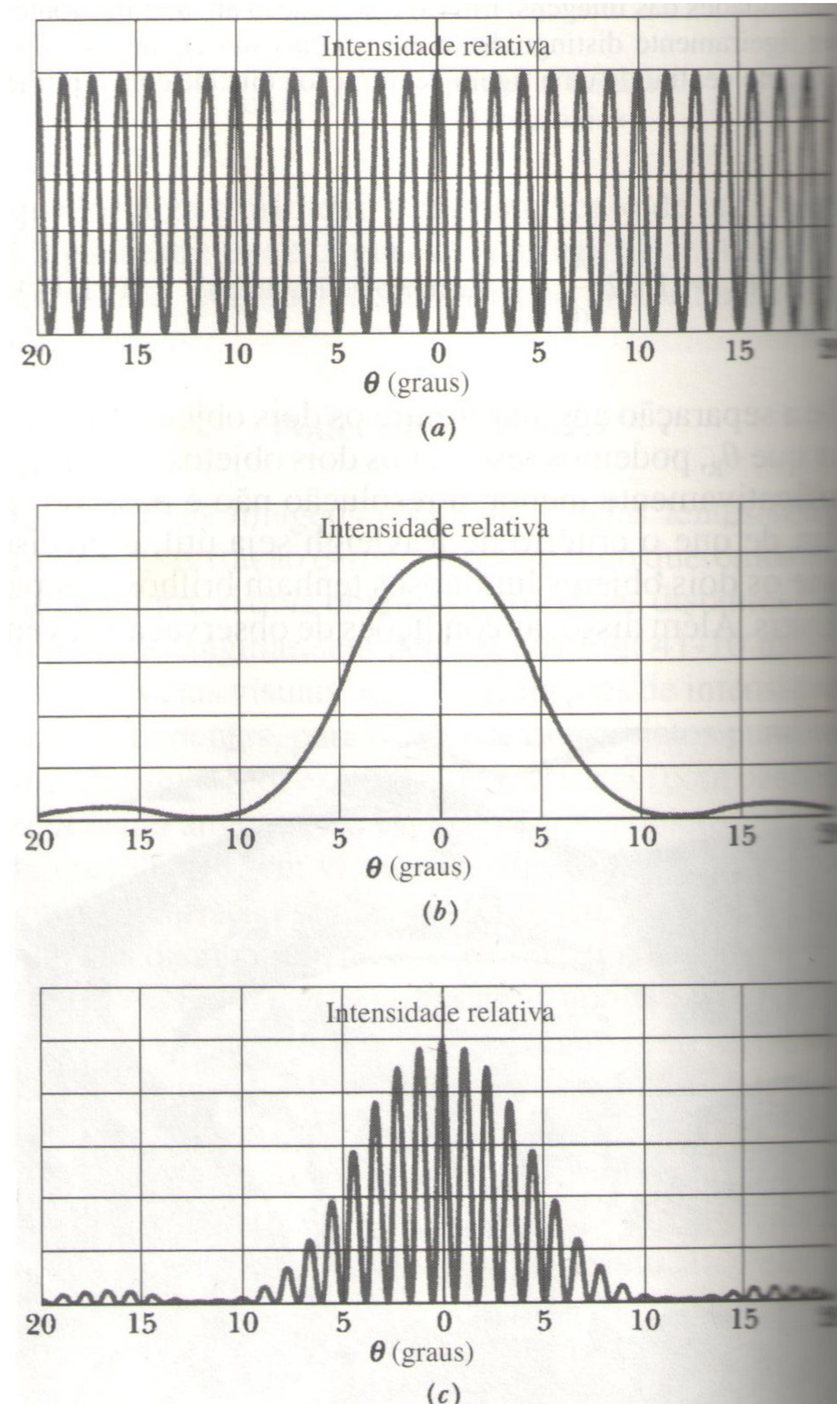


(c) observe que $x_{min} = m\ (\lambda\ L\ /\ a)$, logo a posição dos mínimos (e máximos) é <u>diretamente proporcional</u> à distância entre a fenda e o local onde é observada a difração. Logo os resultados acima seriam

100 cm / 10 cm = 10 vezes maiores.

Experiência de Young

- Na figura (a) ao lado, o padrão de difração gerado por duas fendas separadas por uma distância *d,* infinitamente estreitas
- Na figura (b) o padrão de difração gerado por uma fenda de largura *a*
- Na figura (c) o padrão de difração gerado por duas fendas, sendo *d* >> *a*



Difração de uma abertura circular

- O caso de ondas que passam por uma abertura circular é bem mais complexo e envolve uma matemática mais avançada.
- No caso de uma fenda, vimos que a posição do primeiro mínimo é dada por:

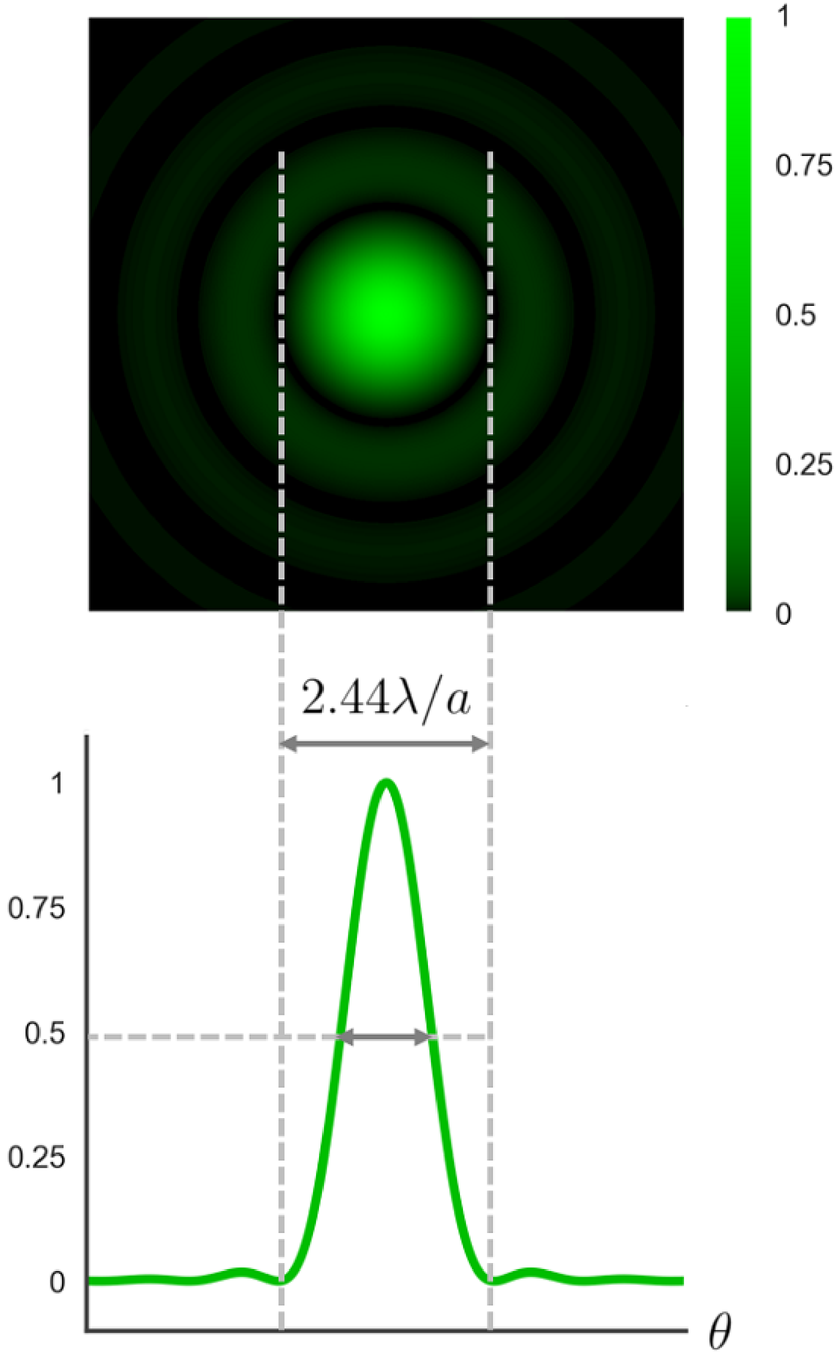
$$a \sin \theta = \lambda$$

- No caso de uma abertura circular, a posição do primeiro mínimo é dada por:

$$a \sin \theta = 1{,}22\, \lambda$$

- A direção da posição do primeiro mínimo (em radianos, contados a partir do centro da figura de difração) é de 1,22 λ/a, onde a é o diâmetro da abertura circular.

- Para se saber a posição em cm ou metros basta multiplicar o ângulo θ (em radianos) pela distância onde é formada a figura de difração.



Exemplo: calcule o diâmetro angular da figura de difração de uma estrela amarela, quando observada pelo olho humano, em minutos de arco.
Dado: diâmetro do olho humano adaptado à escuridão: 6 mm

Sol.: utilizamos a fórmula de Rayleigh: $2{,}44\ \lambda / a$

Uma estrela irradia em diversos comprimentos de onda, mas neste caso o máximo de intensidade se dá na luz amarela (λ = 550 nm). Substituimos na fórmula:

$$2{,}44\ \lambda / a = 2{,}44 \times 550 \times 10^{-9}\ \text{m} / 6 \times 10^{-3}\ \text{m} = 0{,}0002236\ \text{rad}$$

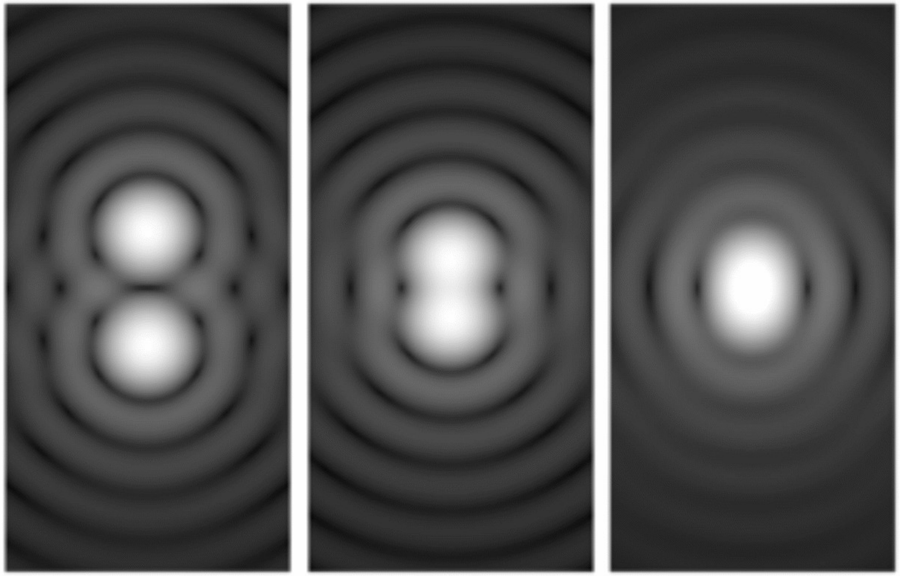
este valor corresponde a: $(180 / \pi) \times 0{,}0002236^{o} = 0{,}0128^{o}$ = 0,77 minutos de arco.

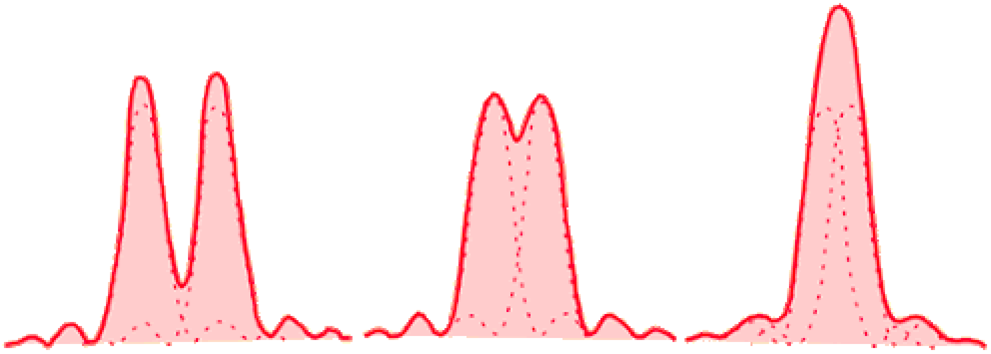
Critério de Rayleigh

- O “critério de Rayleigh” estabelece qual é o ângulo mínimo que deve haver entre duas fontes pontuais de ondas de modo que elas sejam discerníveis ou “resolvíveis” quando observadas através de uma abertura circular de diâmetro *a:*

$$\theta_{min} = 1{,}22\ \lambda\ /\ a$$

- Segundo este critério, a distância angular mútua deve ser, no mínimo, igual à posição do mínimo da fonte vizinha.

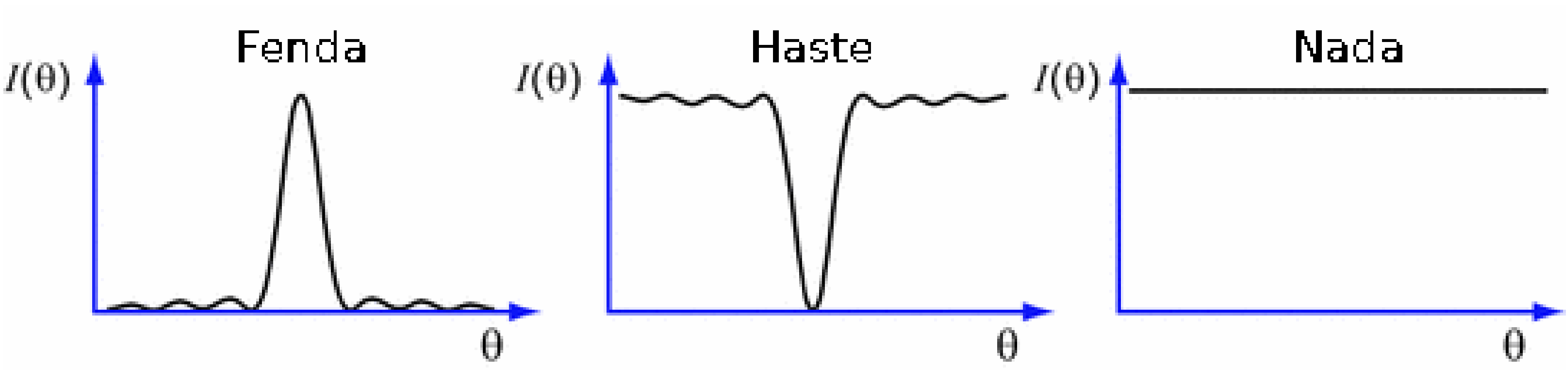




Princípio de Babinet

“A figura de difração formada por um corpo opaco é idêntica àquela formada por uma abertura do mesmo tamanho e formato”

- Na figura abaixo, a figura de difração formada pela passagem de ondas planas através de:
  - uma fenda
  - uma haste
  - sem obstáculo



Fim