

# Introdução às Oscilações em uma dimensão

Roberto Ortiz

*Professor Livre-Docente*

*Escola de Artes, Ciências e Humanidades*

*Universidade de São Paulo*

August 25, 2021

## 1 Equação geral do movimento de um oscilador harmônico livre em uma dimensão

Existe uma grande variedade de sistemas físicos na natureza que exibem oscilações. As características do movimento desses sistemas dependem das características da força atuante. Talvez o tipo mais comum seja aquele no qual a força que produz a oscilação tem intensidade variável e aumenta proporcionalmente ao deslocamento por ela provocado desde a posição de equilíbrio. Este é o caso, por exemplo, de uma força elástica resultante de uma mola. Quando a mola está “relaxada” não há força alguma. Porém, ao ser deslocada (puxada ou empurrada), surge uma força, dita “elástica”, cuja intensidade aumenta proporcionalmente ao deslocamento realizado. Quanto mais se comprime (ou se estica) a mola, maior a força envolvida.

A figura 1 ilustra como a intensidade da força elástica varia em função do deslocamento. A “reta” do gráfico é uma função afim, que passa pela origem. Quanto maior a força da mola para um dado deslocamento, mais inclinada é a reta que representa a força elástica. Podemos obter um gráfico desse tipo utilizando a função abaixo:

$$F = -kx \tag{1}$$

onde  $F$  é a intensidade da força e  $x$  é o deslocamento, i.e. a distância de extensão ou compressão, medida a partir da posição de equilíbrio do sistema. O sinal negativo indica que a força se opõe ao deslocamento. Por exemplo, se realizamos um deslocamento em uma dada direção, a força  $F$  agirá no sentido de reestabelecer a posição original,

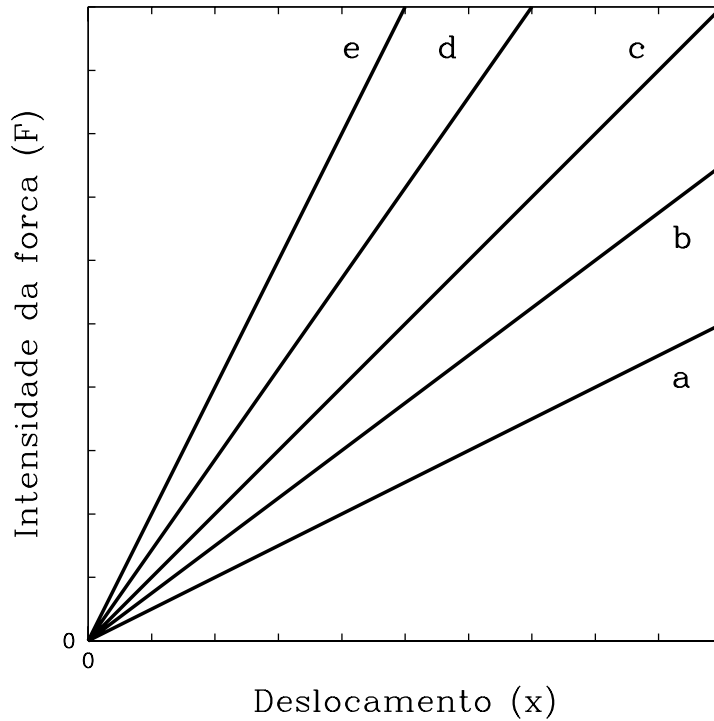


Figure 1: A intensidade da força elástica em função do deslocamento a partir da posição de equilíbrio do sistema. As retas representam diferentes constantes elásticas, em ordem crescente:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  e  $e$ .

opondo-se ao deslocamento realizado. A constante  $k$  é chamada “constante elástica” do sistema. Quanto maior a força para um determinado deslocamento, maior será a constante  $k$ . Sistemas mais “duros” (*i.e.* aqueles que demandam maior força para um determinado deslocamento) têm um maior valor da constante  $k$  e conseqüentemente a reta que representa esse sistema (Fig. 1) é mais inclinada, e vice-versa.

Podemos reescrever a equação anterior utilizando a segunda lei de Newton, na qual a aceleração é escrita como a segunda derivada da posição do objeto sujeito à força  $F$ :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (2)$$

ou ainda

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x(t) \quad (3)$$

Na equação acima  $x$  é uma função do tempo e  $k/m$  é uma constante. O leitor mais adiantado em Cálculo Diferencial e Integral imediatamente reconhecerá que a equação 3 é uma *equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem*. Neste caso, pode-se obter sua solução diretamente a partir do *polinômio característico*. Por outro lado, o leitor que possui conhecimento apenas elementar de Cálculo Diferencial pode “imaginar” qual seria a solução da equação 3, lembrando que a função  $x(t)$  é igual à sua segunda derivada, multiplicada por uma constante. Além disso,  $x(t)$  deve ser periódica, pois ela representa um movimento oscilatório. Em seguida, vamos verificar se as funções *seno* e/ou *coseno* atendem a essas exigências.

$$x(t) = \sin(t)$$

$$x'(t) = \cos(t)$$

$$x''(t) = -\sin(t)$$

Logo, a segunda derivada de  $\sin(t)$  é igual ao seu negativo. O leitor pode verificar que o mesmo é válido para a função *coseno*.

A solução da equação 3 é na realidade bem mais ampla do que meramente um seno ou um coseno. Por exemplo, um teorema do Cálculo Diferencial garante que se multiplicarmos a função seno (ou a função coseno) por uma constante  $A$ , o resultado também será uma solução da equação 3. Além disso, se trocarmos o argumento  $t$  da função seno ou coseno por uma constante  $\omega$  vezes  $t$ , a nova função  $x(t) = \sin(\omega t)$  também será uma solução da equação 3. Utilizamos a *regra da cadeia* para a derivação de  $x(t)$ :

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

$$x'(t) = A\omega \cos(\omega t)$$

$$x''(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t)$$

e portanto concluímos que:

$$x''(t) = -\omega^2 x(t) \quad (4)$$

O leitor pode verificar que a função cosseno é igualmente válida como solução para a equação 3.

Vamos tentar compreender os significados de  $A$  e  $\omega$ . A constante  $A$  multiplica a função seno (ou cosseno). Naturalmente, a função seno tem uma amplitude igual a 1, mas no caso acima a “nova” amplitude de  $x(t)$  será igual a  $A$ . Logo,  $A$  representa a *amplitude* do movimento oscilatório. Quanto à constante  $\omega$ , podemos compreender o seu significado a partir do estudo das funções trigonométricas. A função  $x(t) = \sin(t)$  (ou  $x(t) = \cos(t)$ ) é periódica e completa um ciclo completo após um argumento  $t = 2\pi$ . Por outro lado, a função  $x(t) = \sin(\omega t)$  (ou  $x(t) = \cos(\omega t)$ ) completa um ciclo completo quando  $\omega T = 2\pi$ , onde  $T$  é o período de tempo de um ciclo completo. Quanto à constante  $\omega = 2\pi/T$ , ela é chamada de *frequência angular* do movimento oscilatório “livre” e é medida em radianos por segundo.

Uma vez que compreendemos o significado das constantes  $A$  e  $\omega$ , vamos ver como elas se relacionam com um sistema oscilatório descrito pela equação 2. Se compararmos as equações 3 e 4:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x(t) = -\omega^2x(t)$$

concluimos que:

$$\omega = \omega_o^1 = \sqrt{k/m} = 2\pi/T \quad (5)$$

Das igualdades acima conclui-se que:

- a frequência angular do movimento oscilatório “livre” ( $\omega_o$ ) é inversamente proporcional ao período ( $T$ )
- a frequência angular é diretamente proporcional à raiz quadrada da constante elástica do sistema oscilatório ( $k$ )
- a frequência angular é inversamente proporcional à raiz quadrada da massa do sistema oscilatório ( $m$ )

Podemos ir mais longe: a Álgebra Linear nos garante que *combinações lineares* dessas funções serão também soluções da equação 3. Portanto, pode-se escrever a solução geral da equação 3 do seguinte modo:

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (6)$$

---

<sup>1</sup>Introduzimos o índice “zero” em  $\omega$  para distinguir a frequência angular do sistema oscilatório “livre” dos sistemas oscilatórios amortecido e forçado, que serão estudados nas próximas seções.

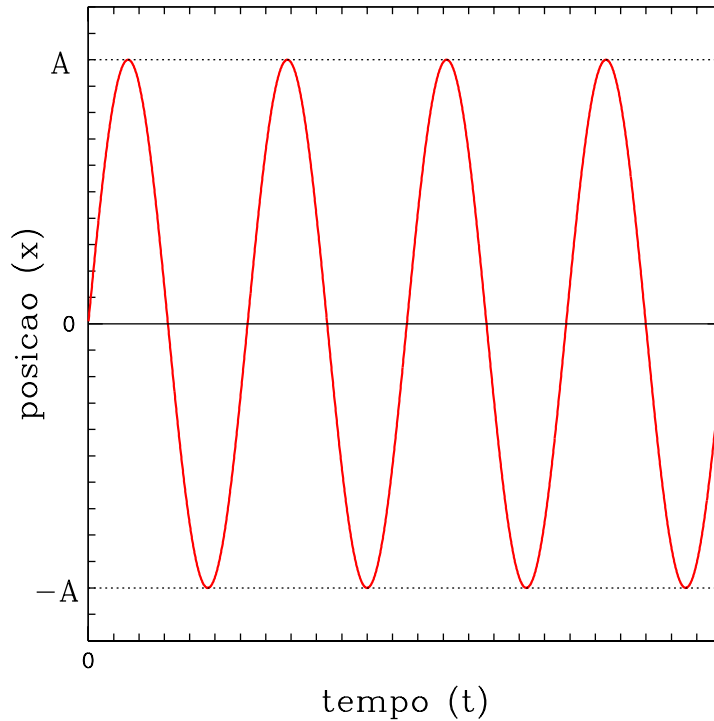


Figure 2: Representação gráfica da posição de uma massa  $m$  em função do tempo  $t$ , oscilando livremente com amplitude  $A$ .

ou ainda, substituindo-se  $\omega_o = 2\pi/T$ :

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + B \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad (7)$$

Poder-se-ia ainda incluir um ângulo de fase inicial (*i.e.* o argumento do seno ou do cosseno no instante inicial do movimento,  $t = 0$ ) na função acima, e elas ainda seriam soluções válidas da equação diferencial do movimento (equação 3). Suponhamos as *constantes de fase*  $\delta$  e  $\phi$ :

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right) + B \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right) \quad (8)$$

Vamos verificar que a função acima também é uma solução geral da equação 3:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{2\pi}{T}\right) A \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right) - \left(\frac{2\pi}{T}\right) B \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right) - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 B \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

Note que a segunda derivada de  $x(t)$  pode ser escrita como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x(t) = -\omega_o^2 x(t),$$

o que equivale à equação 3.

Na solução geral apresentada acima,  $A$  e  $B$  não podem ser simultaneamente nulos (seria a solução trivial), mas fazendo-se alternativamente  $A$  ou  $B$  igual a zero, pode-se escolher isoladamente a função seno ou coseno como solução para a equação do movimento. A escolha de  $A$  **ou**  $B$  nulo visa ajustar a solução geral às condições específicas do problema em questão. Deve-se portanto avaliar caso a caso optar por  $A = 0$  ou  $B = 0$ , conforme os dados do problema.

Na prática, pode-se determinar as constantes  $\delta$  e  $\phi$  conhecendo-se as condições iniciais do movimento. Por exemplo, se for dado que a posição inicial da massa  $m$  é  $x(0) = c$ , teremos:

$$x(0) = c = A \sin(\delta)$$

ou

$$x(0) = c = B \cos(\phi)$$

Obteríamos portanto  $\delta = \arcsin(c/A)$  se  $B = 0$  ou  $\phi = \arccos(c/B)$  se  $A = 0$ .

## 2 Oscilações amortecidas em uma dimensão

Vamos examinar agora o caso em que o movimento é amortecido, isto é, há uma força que se opõe ao movimento. Essa força geralmente se deve ao atrito com o meio, tal como a resistência do ar, por exemplo. A intensidade dessa força é proporcional à viscosidade do meio, da geometria (tamanho, formato) do objeto e do quadrado de sua velocidade. No entanto, se considerarmos essa dependência, a equação do movimento advém de uma equação diferencial não-linear, o que é de difícil solução. Normalmente faz-se uma simplificação: se o objeto não atinge altas velocidades, a força de atrito é proporcional à primeira potência da velocidade, descartando-se o termo quadrático. Neste caso, teríamos a seguinte equação diferencial, semelhantemente à equação 2:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}, \tag{9}$$

onde o sinal negativo à frente de  $k$  denota que a força é “restauradora”, como fizemos na equação 2. A constante  $b$  é chamada de “constante de amortecimento” e o sinal negativo à sua frente indica que a força de atrito opõe-se à direção da velocidade (sendo  $b > 0$ ). Quanto maior o valor de  $b$ , maior o amortecimento. É mais prático re-escrever a equação acima como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right) x(t) = 0 \quad (10)$$

Na seção anterior vimos que funções exponenciais têm a propriedade de que sua segunda derivada é proporcional à função original. Logo, vamos tentar uma solução da equação acima na forma de uma exponencial genérica:

$$x(t) = Ae^{ct} \quad (11)$$

e em seguida, calculamos suas derivadas:

$$x'(t) = cAe^{ct}$$

$$x''(t) = c^2Ae^{ct}$$

onde utilizamos a notação  $\dot{x}(t)$  para denotar a primeira derivada e assim por diante. Ao substituir essa solução “tentativa” na equação 10 obtemos:

$$c^2Ae^{ct} + (b/m)cAe^{ct} + (k/m)Ae^{ct} = 0$$

Podemos “cancelar” a constante  $A$ . Além disso, a exponencial acima nunca se anula, logo ela também pode ser “cancelada”, restando:

$$c^2 + \left(\frac{b}{m}\right)c + \left(\frac{k}{m}\right) = 0 \quad (12)$$

A equação acima é chamada de *polinômio característico* da equação diferencial 10. Na prática, estamos buscando os valores possíveis da constante  $c$  que aparece na exponencial de 11. O *polinômio característico* é, neste caso, uma equação de segundo grau, cuja solução é bem conhecida por todos (fórmula de Bhaskara):

$$c = \frac{1}{2} \left( -\frac{b}{m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{m^2} - \frac{4k}{m}} \right)$$

$$c = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2 - 4mk}{m^2}}$$

Finalmente, a solução que buscamos para  $c$  pode ser re-escrita como:

$$c = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk} \quad (13)$$

Outra solução possível para  $x(t)$  é, análoga à função 11:

$$x(t) = Be^{-ct} \quad (14)$$

$$x'(t) = -cBe^{-ct}$$

$$x''(t) = c^2Be^{-ct}$$

O leitor poderá verificar facilmente que neste caso o polinômio característico será:

$$c^2 - \left(\frac{b}{m}\right)c + \left(\frac{k}{m}\right) = 0 \quad (15)$$

cuja solução é:

$$c = +\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk} \quad (16)$$

No entanto, como a exponencial na equação 14 tem um sinal negativo, essa exponencial se comporta de maneira semelhante àquela da equação 11 e ambas tendem a zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Dependendo dos valores (relativos) das constantes  $b$ ,  $m$  e  $k$  e das condições iniciais a solução apresentará características diferentes. Vamos a seguir, examinar cada uma das possibilidades.

## 2.1 Caso I: Sub-amortecimento ( $b^2 < 4mk$ )

Neste caso o valor dentro do radical da equação 13 é negativo e

$$c = -\frac{b}{2m} \pm \left(\frac{1}{2m}\sqrt{4mk - b^2}\right)i \quad (17)$$

onde  $i$  é o número imaginário  $\sqrt{-1}$ . Logo, a solução da equação do movimento é uma exponencial que contém uma parte real e uma parte imaginária. A parte imaginária da exponencial:

$$e^{\pm \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}it} \quad (18)$$

é uma solução periódica pois, segundo a fórmula de Euler:



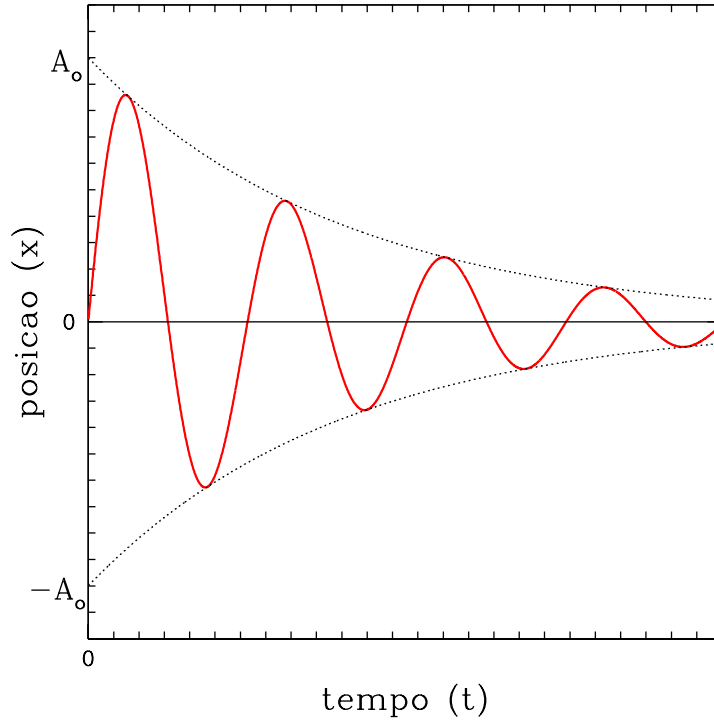


Figure 3: Representação gráfica da posição de uma massa  $m$  em função do tempo  $t$  de um oscilador harmônico sub-amortecido com amplitude inicial  $A_0$ . A linha pontilhada representa a amplitude de oscilação em função do tempo (equação 23).

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \quad (19)$$

Obviamente, devemos descartar a parte imaginária dessa solução. Além disso, o sinal negativo antes do radical da exponencial é irrelevante pois  $\cos(-x) = \cos(x)$ . Ao substituirmos o valor de  $c$  na equação 11, obtemos:

$$x(t) = Ae^{ct} = Ae^{-(b/2m)t} \cos(\omega_a t) \quad (20)$$

onde  $\omega_a$  é a frequência angular do movimento amortecido, igual a:

$$\omega_a = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m} \quad (21)$$

Podemos re-escrever a equação acima em termos de  $\omega_o = \sqrt{k/m}$ :

$$\omega_a = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m} = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{\sqrt{4m^2}} = \sqrt{\frac{4mk}{4m^2} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{1}{4} \left(\frac{b}{m}\right)^2}$$

Logo:

$$\omega_a = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{b}{m}\right)^2} \quad (22)$$

Observe que a frequência  $\omega_a$  é “um pouco” menor do que aquela do movimento oscilatório não-amortecido  $\omega_o$ . Por exemplo, se fizermos  $b = 0$  teremos  $\omega_a = \omega_o$ , que é a frequência “natural” de oscilação do sistema sem amortecimento. Logo, quanto menor for a constante de amortecimento, mais próxima da frequência de oscilação natural (*i.e.* sem amortecimento) oscilará o sistema. A constante  $A$  é a *amplitude inicial* do sistema. A *amplitude do movimento* diminui com o tempo da seguinte forma:

$$A(t) = Ae^{-(b/2m)t} \quad (23)$$

Quanto maior for o valor de  $b$ , mais rapidamente o sistema cessará o seu movimento (em tese, somente em  $t \rightarrow \infty$ ). Uma representação gráfica do movimento oscilatório sub-amortecido pode ser vista na figura 3.

## 2.2 Caso II: Super-amortecimento e amortecimento crítico ( $b^2 \geq 4mk$ )

Vamos examinar inicialmente o caso de super-amortecimento, *i.e.*  $b^2 > 4mk$ . Se o radical da equação 13 for positivo a exponencial é real. Resta-nos examinar o seu sinal. Re-escrevamo-la:

$$c = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m} \frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{b^2}} \sqrt{b^2 - 4mk}$$

$$c = -\frac{b}{2m} \pm \frac{b}{2m} \sqrt{\frac{b^2 - 4mk}{b^2}}$$

$$c = -\frac{b}{2m} \pm \frac{b}{2m} \sqrt{1 - \frac{4mk}{b^2}}$$

mas  $4mK/b^2 < 1$  pois  $b^2 > 4mk$ , logo o radical é positivo e está no intervalo entre 0 e 1. Chamemos o radical de  $\alpha$ . Assim, temos:

$$c = -\frac{b}{2m} \pm \alpha \frac{b}{2m}$$

$$c = -\frac{b}{2m}(1 \pm \alpha)$$

como  $\alpha < 1$  temos necessariamente que  $(1 \pm \alpha) > 0$ , logo a equação do movimento tem uma exponencial de um número negativo. Portanto o sistema não oscila e a posição da massa  $m$  se aproxima de  $x = 0$  quanto  $t$  aumenta.

No caso crítico em que  $b^2 = 4mk$  o polinômio característico tem uma raiz dupla, isto é (equação 13):

$$c = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{b^2 - 4mk} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{0} = -\frac{b}{2m}$$

Portanto neste caso o sistema também não oscila e o sistema tende à posição de equilíbrio quando  $t \rightarrow \infty$ . Uma solução exata depende das *condições iniciais* do sistema, como, por exemplo, o valor e a direção da velocidade inicial (em direção à posição de equilíbrio ou oposta a ela?). Serão essas condições que permitirão o cálculo dos valores das constantes  $A$  e  $B$  nas funções 11 e 14.

### 3 Oscilações forçadas

Nesta seção vamos examinar o caso onde há uma força “extra” atuando no sistema, imprimindo-lhe periodicamente um impulso. A equação diferencial do movimento contém um termo a mais: a força externa.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_o \cos(\omega_f t) \quad (24)$$

Fizemos com que a força externa seja periódica, com amplitude  $F_o$  e frequência angular  $\omega_f$ , que não é necessariamente igual à frequência natural do sistema oscilante, seja ele amortecido ( $\omega_a$ ) ou não-amortecido ( $\omega_o$ ). A equação diferencial acima é do tipo *não-homogênea* e sua solução constitui-se na soma de duas partes: (1) a solução homogênea (que já encontramos na seção anterior); (2) uma outra função, cuja primeira e segunda derivadas sejam semelhantes à função que descreve a força externa. Note que estamos aplicando o mesmo princípio que utilizamos quando “tentamos” uma solução para a equação homogênea. A massa  $m$  estará portanto sujeita a oscilar com a frequência da força externa aplicada:

$$x(t) = A_f \cos(\omega_f t + \phi) \quad (25)$$

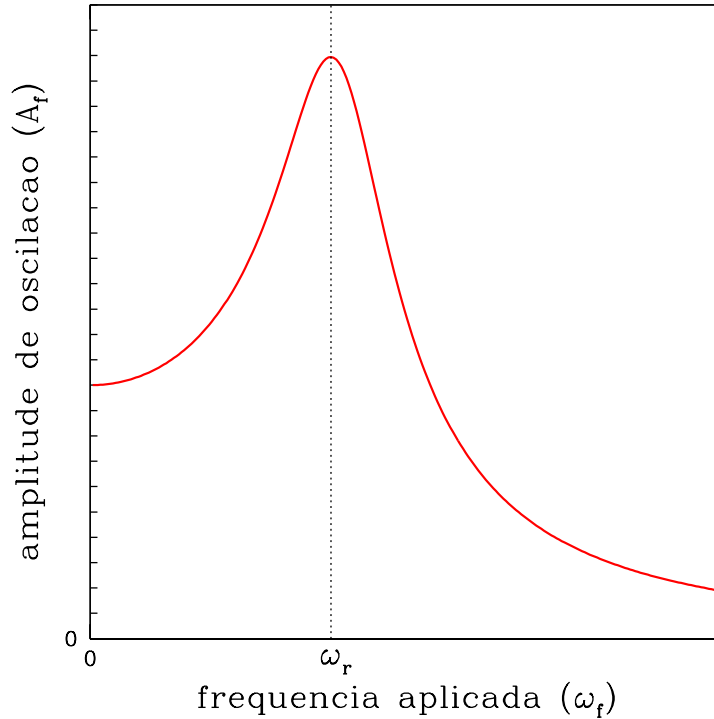


Figure 4: Representação gráfica da amplitude de um oscilador forçado, em função da frequência angular da força aplicada. A amplitude máxima corresponde à configuração de ressonância, *i.e.* com  $\omega_f = \omega_r$ , dado pela equação 27.

A amplitude do movimento ( $A_f$ ) dependerá da relação entre a frequência “natural” do sistema (*i.e.*  $\omega_o$ ) e da frequência da força aplicada ( $\omega_f$ ):

$$A_f = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_o^2)^2 + (b/m)^2\omega_f^2}} \quad (26)$$

Nas oscilações forçadas a amplitude não diminui com o tempo, mas permanece constante. Isso acontece porque a força aplicada compensa a força amortecedora, fornecendo a energia necessária para manter a oscilação. Uma representação gráfica da amplitude de um oscilador forçado em função da frequência angular da força externa aplicada é dada na figura 4.

### 3.1 Ressonância

A equação 26 mostra que a amplitude do movimento é máxima quando o denominador assume um valor mínimo. Vamos determiná-lo chamando a raiz do denominador de uma função  $g(\omega_f)$ . Acharmos o mínimo dessa função aplicando-lhe a primeira derivada e igualando-la a zero:

$$g(\omega_f) = (\omega_f^2 - \omega_o^2)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega_f^2$$
$$\frac{dg}{d\omega_f} = 2(\omega_f^2 - \omega_o^2)2\omega_f + 2\left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega_f = 0$$

“Cancelamos” o termo  $2\omega_f$  acima e obtemos:

$$2(\omega_f^2 - \omega_o^2) + \left(\frac{b}{m}\right)^2 = 0$$
$$2\omega_f^2 - 2\omega_o^2 = -\left(\frac{b}{m}\right)^2$$
$$\omega_f^2 = \frac{1}{2} \left( 2\omega_o^2 - \left(\frac{b}{m}\right)^2 \right)$$

e deste modo encontramos a *frequência de ressonância* ( $\omega_r$ ), *i.e.* a aquela que proporciona a maior amplitude de oscilação para um sistema de massa  $m$ , constante elástica  $k$  e constante de amortecimento  $b$ :

$$\omega_r = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{m}\right)^2} \quad (27)$$

onde  $\omega_o$  é, como já vimos, igual a  $\sqrt{k/m}$ . Compare a expressão acima com a frequência angular do oscilador amortecido (equação 22) e observe que:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} > \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{1}{4} \left(\frac{b}{m}\right)^2} > \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{m}\right)^2}$$
$$\omega_o > \omega_a > \omega_r$$

Vejam como fica a amplitude de oscilação de um sistema forçado no caso hipotético em que não há amortecimento:

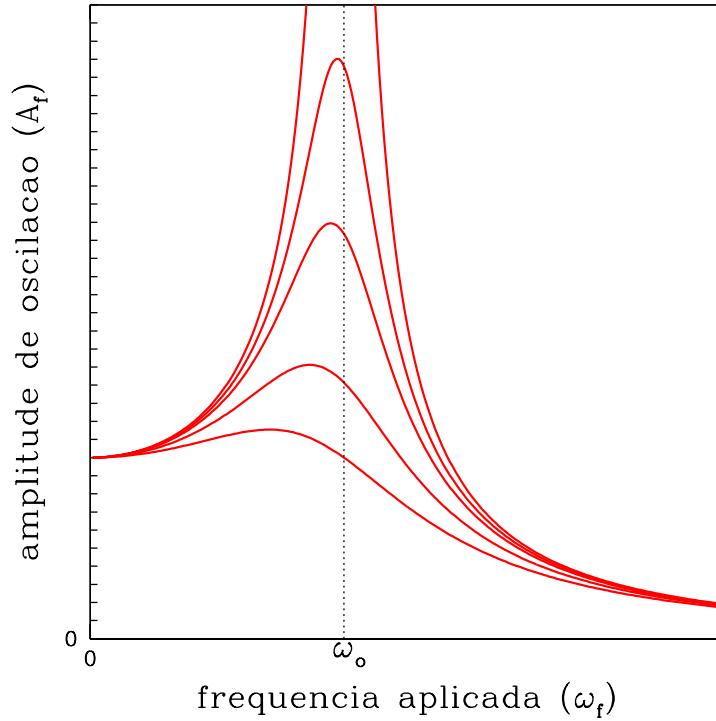


Figure 5: Representação gráfica da amplitude de um oscilador forçado, em função da frequência angular da força aplicada, para diversas constantes de amortecimento. As curvas superiores correspondem a um **menor** valor da constante de amortecimento  $b$  (e vice-versa).

Assumindo  $b = 0$ :

$$\omega_r = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{0}{m} \right)^2} = \omega_o$$

A frequência de oscilação torna-se igual àquela de um sistema livre de amortecimento, *i.e.*  $\omega_r = \omega_o$ . Substituindo essa frequência na equação que fornece a amplitude  $A_f$  (equação 26), obtemos:

$$A_r = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_r^2 - \omega_o^2)^2 + (b/m)^2 \omega_r^2}}$$

$$A_r = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_o^2)^2 + (0/m)^2\omega_o^2}} = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_o^2)^2}} \rightarrow \infty$$

Observa-se no cálculo acima que quanto **menor** for o valor do coeficiente de amortecimento  $b$ , **maior** será a amplitude do sistema perto da frequência de ressonância. A figura 5 ilustra como varia a amplitude de oscilação em função da frequência angular da força aplicada, para diversos valores da constante de amortecimento  $b$ .

## 4 Energia e potência dissipada de sistemas oscilantes

Um sistema oscilante “livre” é uma idealização de um sistema no caso em que a energia mecânica é conservada, *i.e.* quando não há forças de amortecimento. A energia mecânica consiste em duas partes: a cinética ( $K$ ) e a potencial ( $U$ ):

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \quad (28)$$

O potencial elástico pode ser obtido diretamente a partir da equação da força elástica, utilizando-se a definição de energia potencial:

$$U(x) = - \int F(x)dx = - \int -kxdx = \frac{1}{2}kx^2 \quad (29)$$

Em um sistema oscilante “livre” a energia mecânica é dada pela equação 28, que é constante. A energia potencial é máxima quando a massa  $m$  atinge sua máxima distância do ponto de equilíbrio, ocasião quando ela para e a energia cinética é zero. Por outro lado, a energia cinética é máxima quando a energia potencial é zero, na posição de equilíbrio, *i.e.* em  $x = 0$ .

Como a energia mecânica é constante, podemos calculá-la em qualquer ponto da trajetória. Tomemos, por exemplo a ocasião onde o objeto para por um instante. Nesse instante, a energia mecânica é composta somente pela energia potencial elástica, logo a energia mecânica de um sistema oscilante é:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad (30)$$

onde  $k$  é a constante elástica do sistema e  $A$  é a amplitude de oscilação, como já vimos.

Se houver uma força de amortecimento então a energia mecânica do sistema não é conservada. A energia é dissipada devido ao trabalho da força de amortecimento e a energia é dissipada somente enquanto a massa  $m$  se movimenta com relação ao meio.

Se supusermos que a força de amortecimento é diretamente proporcional à velocidade, podemos calcular a potência dissipada instantânea:

$$\begin{aligned}
 P_i(t) &= \frac{dE}{dt} \\
 P_i(t) &= \left(\frac{dE}{dx}\right) \left(\frac{dx}{dt}\right) = F_a(t)v(t) \\
 P_i(t) &= -bv^2(t) = -b\left(\frac{dx}{dt}\right)^2
 \end{aligned} \tag{31}$$

onde a força de amortecimento  $F_a = -bv(t)$  é variável no tempo,  $b$  é a constante de amortecimento e  $v = dx/dt$  é a velocidade instantânea da massa  $m$  no instante  $t$ . Observa-se portanto que a potência dissipada varia constantemente em função do tempo.

A equação 31 é válida para quaisquer casos de sistemas amortecidos, inclusive nos casos de sub-amortecimento, amortecimento crítico e super-amortecimento. Para calcular a potência dissipada instantânea em qualquer caso basta obter a primeira derivada de  $x(t)$ , elevá-la ao quadrado e multiplicá-la pela constante  $b$ . No entanto, às vezes é mais útil obtermos a *potência média* dissipada, especialmente quando as oscilações são rápidas. Por exemplo, o cálculo da potência média dissipada ( $P_m$ ) de um sistema sub-amortecido é feito calculando-se a derivada da energia mecânica no tempo:

$$\begin{aligned}
 P_m &= \frac{dE}{dt} \\
 P_m &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}kA^2(t)\right) \\
 P_m &= \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \left(Ae^{-(b/2m)t}\right)^2 \\
 P_m &= \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \left(A^2e^{-(b/m)t}\right) \\
 P_m &= -\frac{bkA^2}{2m}e^{-(b/m)t}
 \end{aligned} \tag{32}$$

onde  $A$  é a amplitude inicial do movimento e utilizamos  $A(t)$  que já havia sido obtido na equação 23.

Pode-se ver que a potência média dissipada diminui exponencialmente, à medida que o sistema amortecido diminui a amplitude de seu movimento. Por outro lado, em um sistema



forçado a energia dissipada é “reposta” por uma força externa aplicada de modo a manter a amplitude do movimento constante. Mesmo assim, em sistemas forçados a energia é dissipada pela mesma força de amortecimento  $F_a$  que age nas oscilações amortecidas. Logo, o cálculo da potência média dissipada é o mesmo, porém a amplitude é mantida constante e  $P_m$  dependerá da frequência angular ( $\omega_f$ ) da força aplicada.

$$P_m = -\frac{bkA_f^2(\omega_f)}{2m}$$

$$P_m = -\frac{bkF_o^2}{2m^3[(\omega_f^2 - \omega_o^2)^2 + (b/m)^2\omega_f^2]} \quad (33)$$

onde  $\omega_o = \sqrt{k/m}$  e utilizamos  $A_f(\omega_f)$  dado pela equação 26.