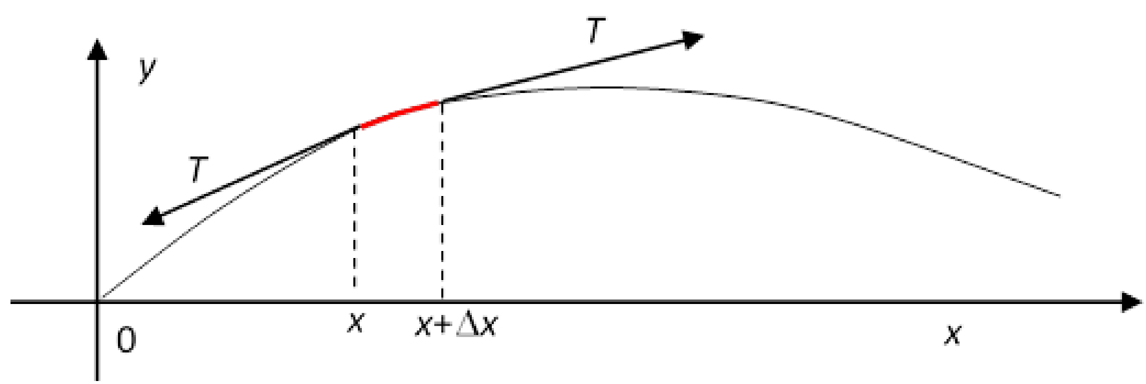
Ondas em uma corda

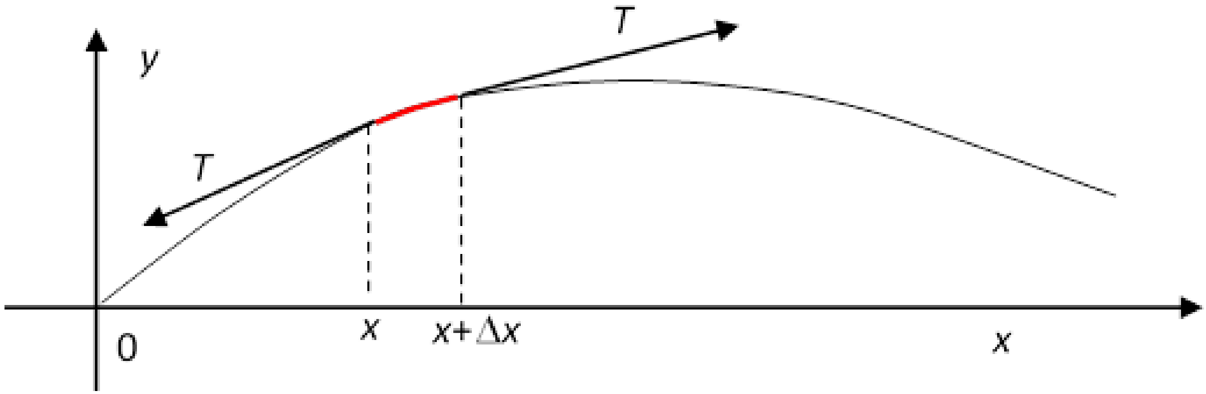
Roberto Ortiz

Professor Livre-Docente
EACH – USP

A velocidade da onda em uma corda

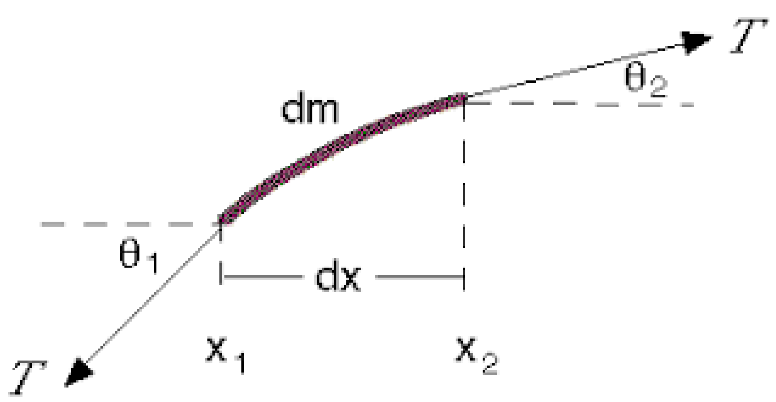
- Suponhamos uma corda com densidade linear de massa **μ**, constante. A unidade de μ é o kg/m.
- μ é uma medida do quão “pesada” é uma corda. Na maioria das vezes uma corda “pesada” é aquela que tem um maior valor de μ.
- Analisemos as forças que atuam sobre um segmento dessa corda:

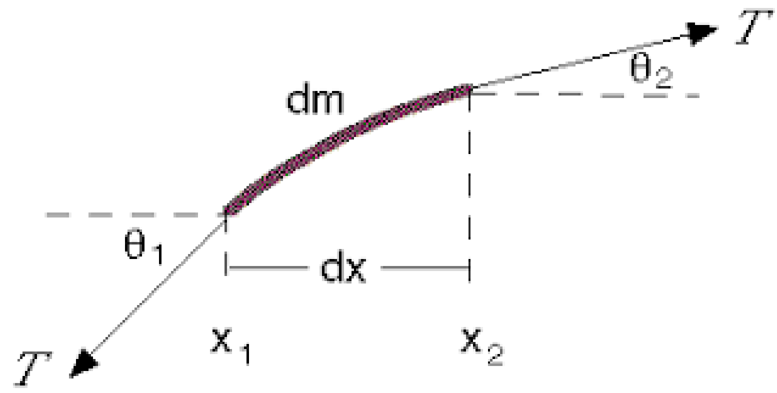




A resultante na direção *x* é nula, pois a oscilação do segmento de corda ocorre somente na direção *y*.

A resultante na direção *y* ocorre devido aos diferentes ângulos da tração nas duas extremidades do segmento de corda.





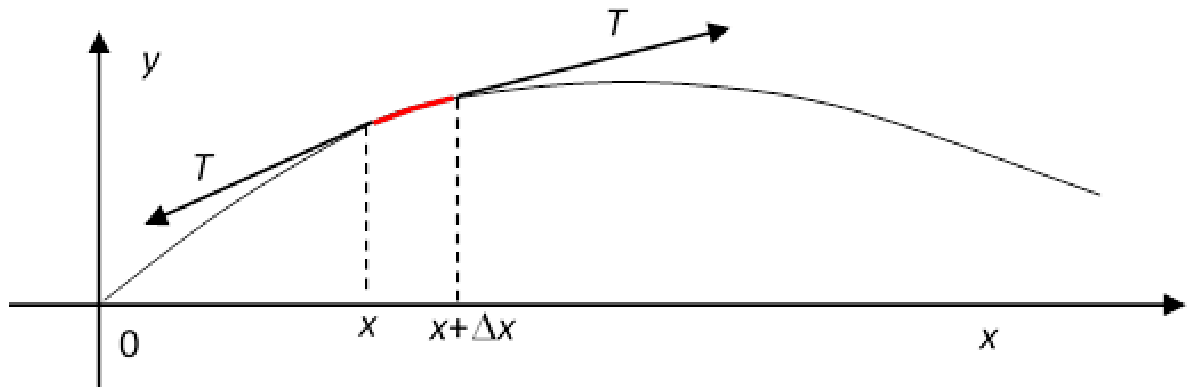
Pode-se ver na figura acima que a resultante na direção *y* é:

$$\Sigma F = T \sin \theta_2 - T \sin \theta_1$$

Para ângulos pequenos (pequenas amplitudes) temos que:

$$\sin \theta \sim \tan \theta:$$

θ (graus)	sin θ	tan θ
1	0,017452	0,017455
2	0,034899	0,034921
4	0,069756	0,069927
8	0,13917	0,14054
16	0,2756	0,2867



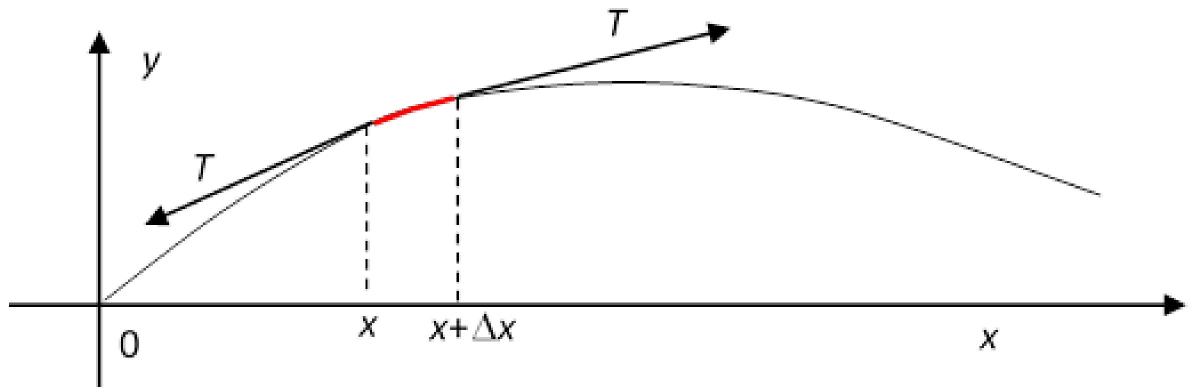
$$\sin\theta \simeq \tan\theta$$

$$\Sigma F = T(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$$

$$\Sigma F = T\left(\frac{\partial y}{\partial x}(x+dx) - \frac{\partial y}{\partial x}(x)\right)$$

Observe porém como a segunda derivada de *y* se relaciona com a expressão acima:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \lim_{dx\to 0}\frac{1}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial x}(x+dx) - \frac{\partial y}{\partial x}(x)\right)$$



$$\sin\theta \simeq \tan\theta$$

$$\Sigma F = T(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$$

$$\Sigma F = T\boxed{\left(\frac{\partial y}{\partial x}(x+dx) - \frac{\partial y}{\partial x}(x)\right)}$$

Observe porém como a segunda derivada de *y* se relaciona com a expressão acima:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \lim_{dx\to 0}\frac{1}{dx}\boxed{\left(\frac{\partial y}{\partial x}(x+dx) - \frac{\partial y}{\partial x}(x)\right)}$$

Obtemos portanto a relação:

$$\Sigma F = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx$$

Aplicamos agora a segunda lei de Newton ao mesmo segmento de corda:

$$\Sigma F = m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\Sigma F = \mu dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\Sigma F = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dx$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

Suponhamos uma onda harmônica: $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = kA\cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A\sin(kx - \omega t)$$

Substituimos essas derivadas na equação da resultante das forças:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

$$-\omega^2 A\sin(kx - \omega t) = \frac{T}{\mu}(-k^2 A\sin(kx - \omega t))$$

Cancelamos o termo $A\sin(kx - \omega t)$:

$$\omega^2 = \frac{T}{\mu}k^2$$

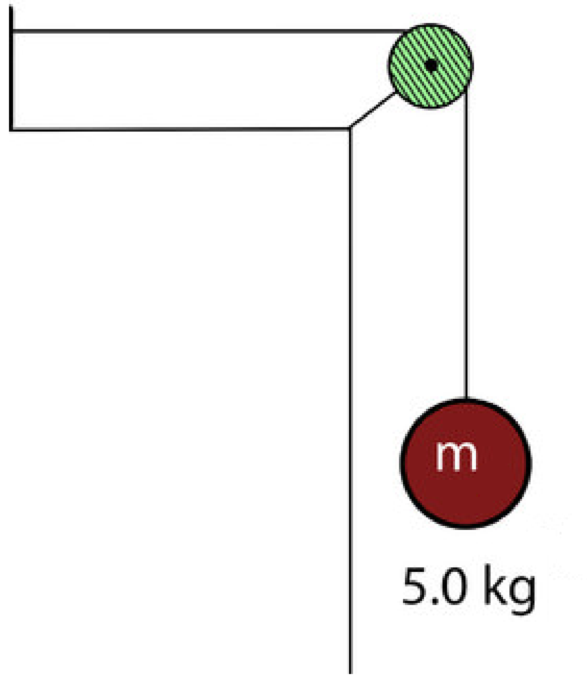
$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{T}{\mu}$$

Lembramos que a velocidade da onda v é a razão entre ω e k:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Onde T é a tensão da corda (em N) e μ é a sua densidade linear (em kg/m)

<u>Exemplo</u>: suponha que o fio abaixo tenha 40 cm de comprimento e 10 g de massa. Calcule a velocidade de uma onda nesse fio.



<u>Sol.</u>: precisamos saber T e μ.

$T = mg = 5{,}0 \times 9{,}8 = 49$ N

$\mu = m / L = 0{,}010$ kg / 0,40 m
$\mu = 0{,}025$ kg/m

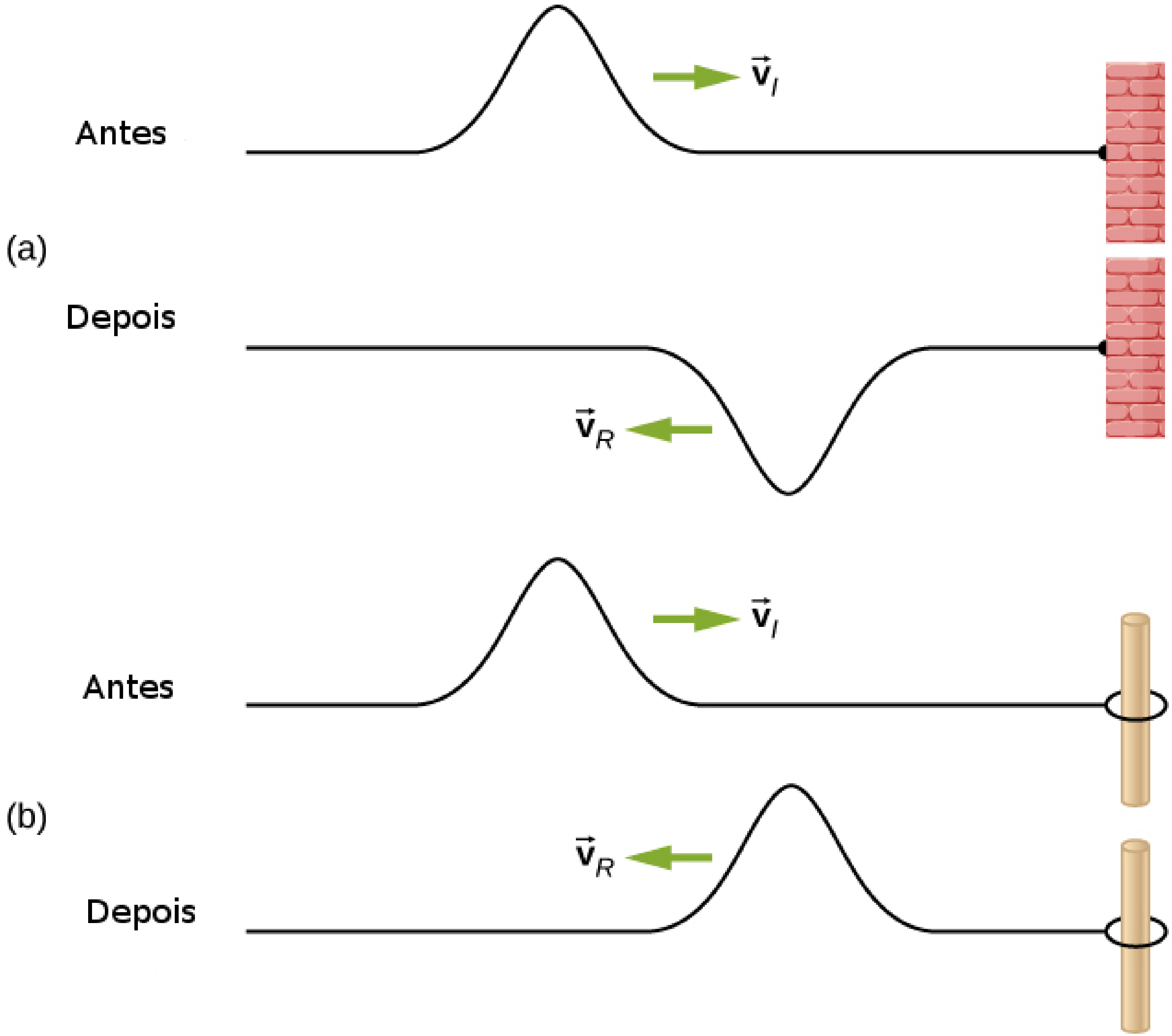
v = sqrt (49 / 0,025) = 44,3 m/s

Reflexão e transmissão de pulsos

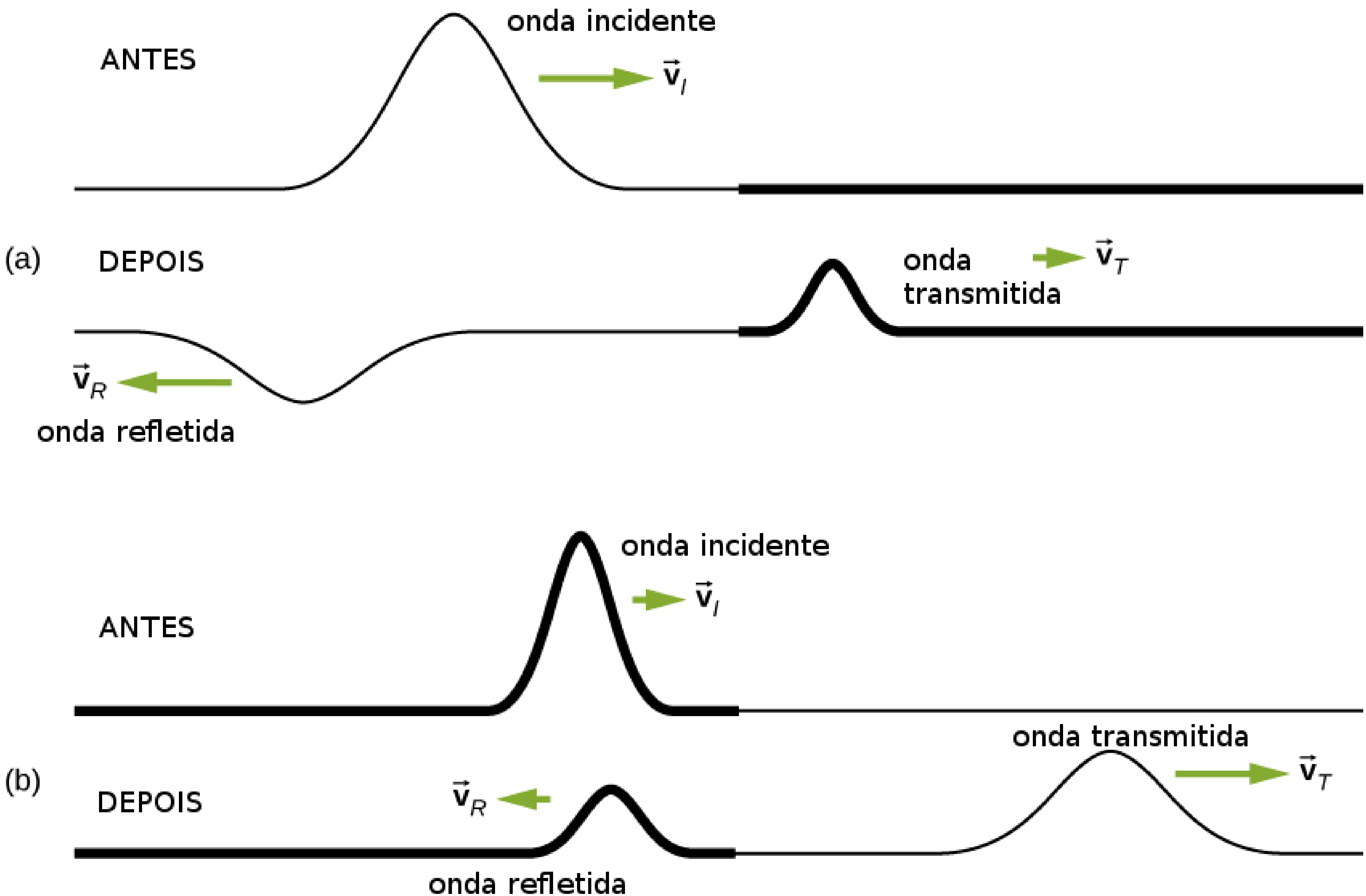
- Ondas transversais em uma corda transmitem energia e momento linear
- Quando uma onda colide com um obstáculo ela se comporta como se fosse uma colisão entre 2 corpos
- Se uma onda transversal em uma corda colide com uma parede rígida a onda refletida será invertida pela parede.
- Se uma onda transversal em uma corda "leve" (i.e. *menor* μ) passa (i.e. "colide") para uma corda mais "pesada" (i.e. *maior* μ) então:
  - Parte da onda será refletida e invertida
  - Parte da onda continuará seu trajeto
- A fração transmitida/refletida depende da razão entre μ_1 e μ_2

Reflexão e transmissão de pulsos

- Se uma onda transversal em uma corda colide com uma <u>parede maleável</u> a onda refletida será não será <u>invertida</u> pela parede.
- Se uma onda transversal em uma corda "pesada" (i.e. *maior* μ) passa (i.e. "colide") para uma corda mais "leve" (i.e. *menor* μ) então:
    - Parte da onda será refletida e "direita"
    - Parte da onda continuará seu trajeto
- A fração transmitida/refletida depende da razão entre μ_1 e μ_2

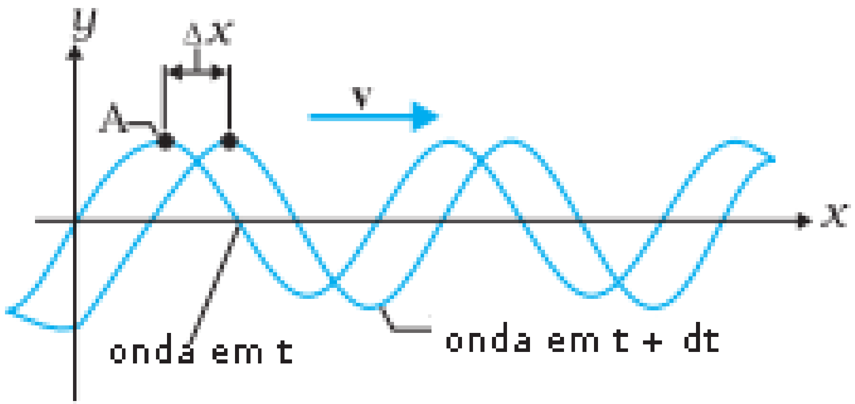


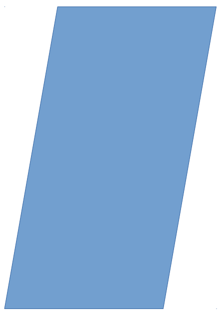
Antes
$\vec{v}_I$
(a)
Depois
$\vec{v}_R$
Antes
$\vec{v}_I$
(b)
$\vec{v}_R$
Depois

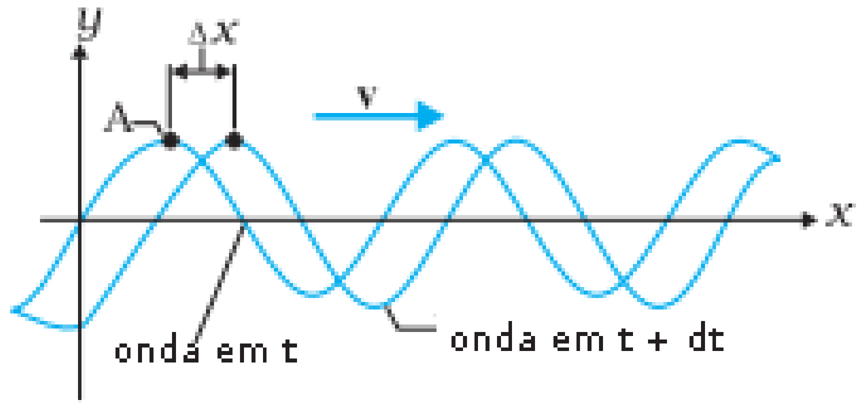

ANTES
onda incidente
$\vec{v}_I$
(a)
DEPOIS
onda
transmitida
$\vec{v}_T$
$\vec{v}_R$
onda refletida
onda incidente
$\vec{v}_I$
ANTES
onda transmitida
$\vec{v}_T$
(b)
DEPOIS
$\vec{v}_R$
onda refletida

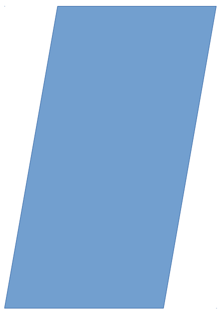
Intensidade de uma onda harmônica em uma corda

- Definimos como <u>intensidade de uma onda</u> (*I*) à taxa de transmissão de energia por unidade de área, por unidade de tempo.
- Suponha que uma onda transversal se mova ao longo de uma corda com velocidade *v*.
- Após um tempo *t*, a onda terá se movido $x = v\,t$









O <u>volume</u> coberto pela onda no tempo t é *V* = *x A*

$$I = \frac{P_{\mathrm{m}}}{A} = \frac{E}{tA} = \frac{\eta V}{tA} = \frac{\eta x A}{tA} = \eta v$$

onde η é a densidade de energia por volume.

$$\eta = \frac{E}{V} = \frac{(1/2)mv_0^2}{V}$$

onde v_0 é a velocidade máxima de oscilação, pois:

$$< E_{\mathrm{cin}} > = < E_{\mathrm{pot}} > = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Logo:

$$v_0^2 = \frac{k}{m} A^2$$

e reconhecemos que $k/m = \omega^2$, como já vimos anteriormente. Logo:

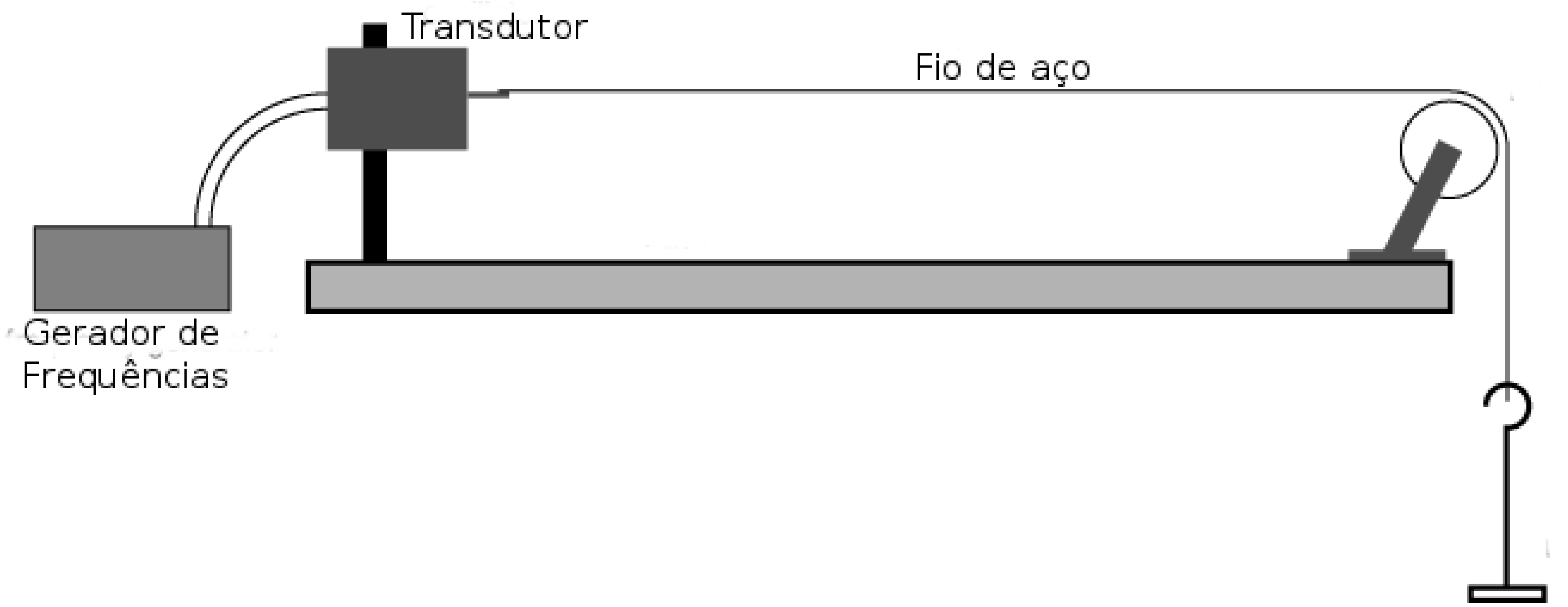
$$\eta = \frac{1}{2} \frac{m v_0^2}{V} = \frac{1}{2} \frac{m \omega^2 A^2}{V} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

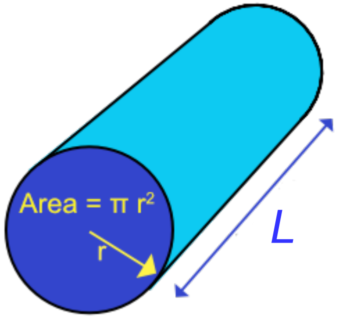
Finalmente, substituimos a expressão de η na fórmula de I:

$$I = \eta v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v$$

onde v é a velocidade de propagação da onda, como já vimos.

Exemplo: calcular a intensidade da onda gerada pelo conjunto abaixo. Suponha que a amplitude gerada pelo transdutor seja de 2 mm na frequência de 300 Hz. O fio tem espessura de 2 mm, comprimento de 40 cm e massa de 5 g. O fio é tensionado por uma massa de 5 kg.





A densidade volumétrica do fio:

$\rho = 5 \times 10^{-3}$ kg / $(\pi\ (1{,}0 \times 10^{-3})^2 \times 0{,}40)$ m^3 = $3{,}98 \times 10^3$ kg/m^3

A <u>densidade linear</u> do fio: $\mu = (m / L) = (5 \times 10^{-3}$ kg / 0,40 m) = 0,0125 kg/m

A <u>velocidade de propagação da onda</u>: v = sqrt (5,0 x 9,8 / 0,0125) = 62,61 m/s

A <u>frequência angular da onda</u>: $\omega = 2 \pi f = 2 \pi\, 300 = 1885$ rad/s

A <u>intensidade da onda</u>:

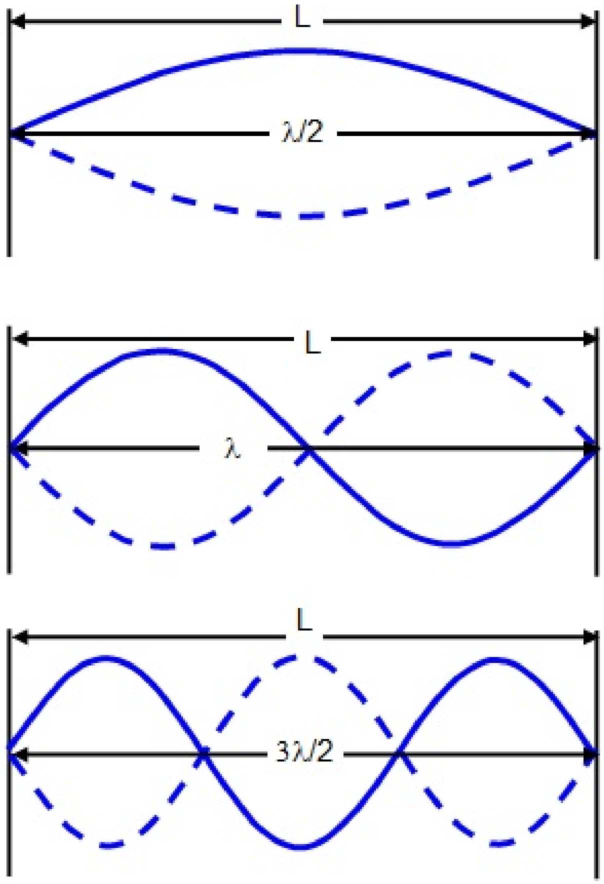
$$I = ½ \rho \omega^2 A^2 v$$

$$I = ½ (3{,}98 \times 10^3) \times 1885^2 \times (2 \times 10^{-3})^2 \times 62{,}61 = 1{,}77\ MW/m^2$$

Ondas estacionárias em uma corda

- Se ambos os lados de uma corda estiverem presos, a onda formada é <u>estacionária</u>
- Os extremos da corda não vibram
- A corda somente poderá vibrar em <u>modos específicos</u> de vibração
- Os pontos da corda onde a amplitude é nula são chamados <u>nós</u>
- Os pontos da corda onde a amplitude é máxima são chamados <u>ventres</u>

Modos de vibração em uma corda



- A figura ao lado representa os 3 primeiros modos de vibração de uma corda.
- O primeiro deles é o “modo fundamental”
- O segundo é o “primeiro harmônico”
- O terceiro é o “segundo harmônico” e assim sucessivamente.

Modos de vibração de uma corda

- No <u>modo fundamental</u> temos que $L = \lambda/2$
- No <u>primeiro harmônico</u> temos que $L = \lambda$
- No <u>segundo harmônico</u> temos que $L = 3/2\ \lambda$
- No <u>terceiro harmônico</u> temos que $L = 2\lambda$

- Expressão geral:

$$\boldsymbol{L = n\,(\lambda/2),\ n = 1, 2, 3, 4\ldots}$$

- Ou ainda, os comprimentos de onda permitidos são:

$$\boldsymbol{\lambda = 2\,(L\,/\,n),\ \ n = 1, 2, 3, 4...}$$

- Também podemos expressar essas relações em termos de frequências utilizando a relação entre velocidade, frequência e comprimento de onda.
- As frequências de vibração permitidas em uma corda são:

$$\lambda = 2\,L\,/\,n$$

$$v\,/\,f = 2\,L\,/\,n$$

$$\boldsymbol{f = n\,(v\,/\,2L),\; n = 1, 2, 3, 4\ldots}$$

f = n x $\mathbf{f_0}$ onde f_0 é a <u>frequência fundamental</u> de vibração

- Na prática, diferentes modos de vibração atuam simultaneamente em uma corda
- Quanto mais modos de vibração houver, mais “rico” é o som de um instrumento de corda
- A fabricação de cordas geralmente visa obter a maior potência possível com o maior número possível de harmônicos
- Cordas com pouca tensão produzem pouco volume
- Cordas com tensão excessiva produzem mais volume, porém são de difícil execução e se rompem com facilidade
- As notas mais graves geralmente requerem um grande comprimento (L), por isso com relação ao tamanho do instrumento:

contrabaixo > violoncelo > viola > violino

Exercício: a nota Lá central do piano tem uma frequência padrão de 440 Hz. Determine a tensão necessária para que uma corda de viola produza esta nota no modo fundamental, sabendo-se que o comprimento da corda vibrante é de 37 cm.

Dado: μ (da corda Lá) = 0,46 g/m.

Sol.: A velocidade da onda estacionária é de:

$$v = \lambda\, f = 37 \times 2 \text{ cm} \times 440 \text{ Hz} = 32\,560 \text{ cm/s}$$

$$v = 325{,}6 \text{ m/s}$$

$$v^2 = T / \mu \rightarrow T = v^2 \mu$$

$$T = 325{,}6^2 \times 0{,}46 \times 10^{-3}\ \text{kg/m}$$

$$T = 48{,}76\ \text{N} = 4{,}97\ \text{kgf}$$

Fim