Combinação de ondas em uma dimensão

Roberto Ortiz

Professor Livre-Docente
EACH – USP

O princípio da superposição

- Se o deslocamento provocado pela passagem de uma onda for diretamente proporcional à força oscilatória então o princípio da superposição é válido
- *"A onda resultante da passagem de diversas ondas individuais é igual à soma de cada onda, individualmente*".
- Em termos matemáticos:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) + y_3(x,t) + \ldots$$

- Onde cada $y_n(x,t)$ é uma onda individual. A <u>frequência</u> (e a amplitude) de cada onda individual pode ser <u>igual ou diferente</u> das demais ondas.
- Para obter a <u>onda resultante</u> da passagem de diversas ondas basta <u>somar</u> as diversas funções que representam cada onda individualmente.
- Na prática, a soma de ondas com características muito diferentes pode levar a longos cálculos matemáticos.
- Existem algumas técnicas práticas para somar ondas de acordo com suas características mútuas (suas frequências, fases, amplitudes, etc.)

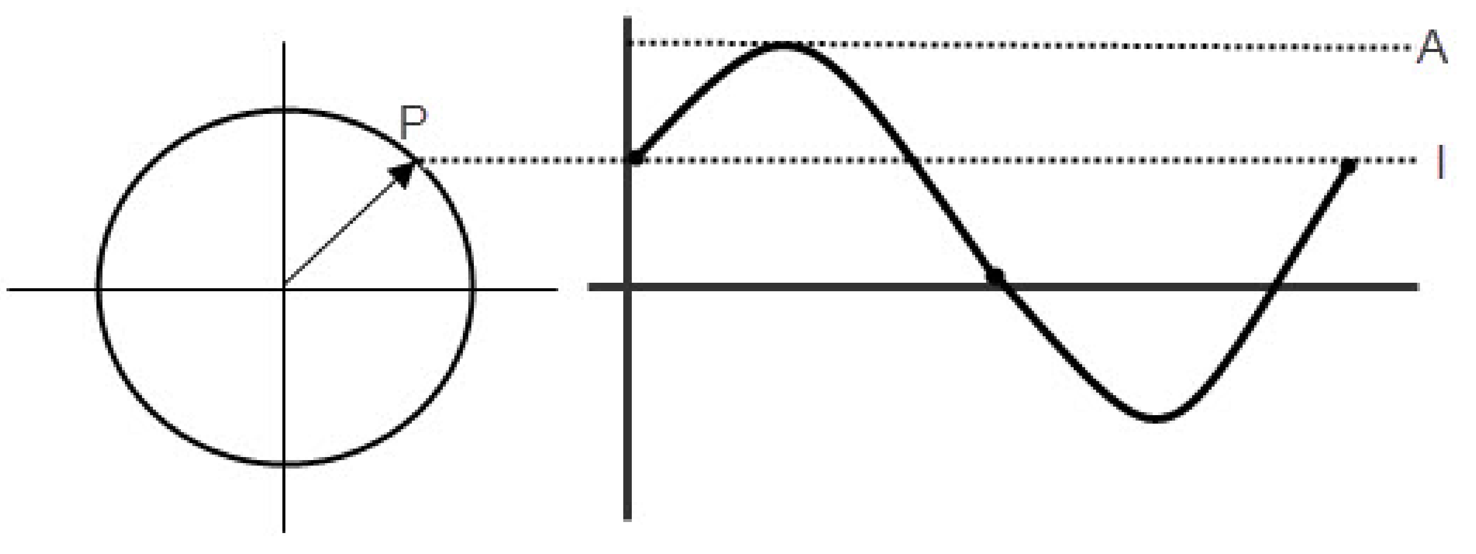
Combinação de 2 (ou mais) ondas com diferentes amplitudes e mesma frequência

Combinação de 2 (ou mais) ondas com diferentes amplitudes e mesma frequência

- A onda resultante dependerá da amplitude e da diferença de fase entre as ondas individuais
- A técnica do “diagrama de fasores” simplifica os cálculos
- Segundo esta técnica, cada onda é representada como um <u>vetor</u>, centrado na origem do sistema de coordenadas e girando com velocidade angular ω.
- A onda resultante terá frequência angular ω.
- A onda resultante terá amplitude igual à <u>soma vetorial</u> dos fasores, observando-se a diferença de fase (ângulo) entre eles.

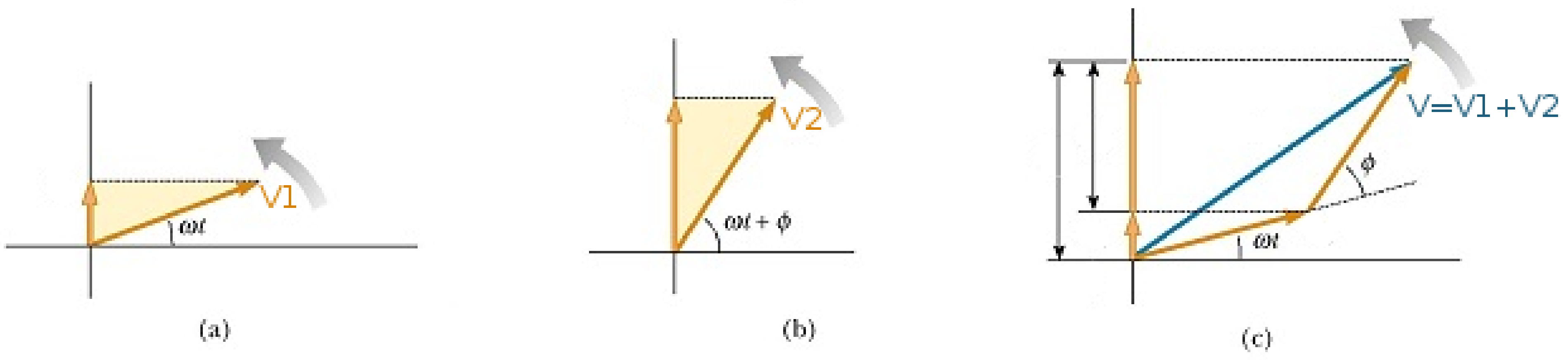
Na figura abaixo, o vetor **P** gira em torno da origem com velocidade angular w. O deslocamento da onda (**I**) é igual à <u>projeção de **P**</u> sobre o eixo-y.

A <u>amplitude da onda</u> (**A**) é igual ao <u>raio da circunferência</u>



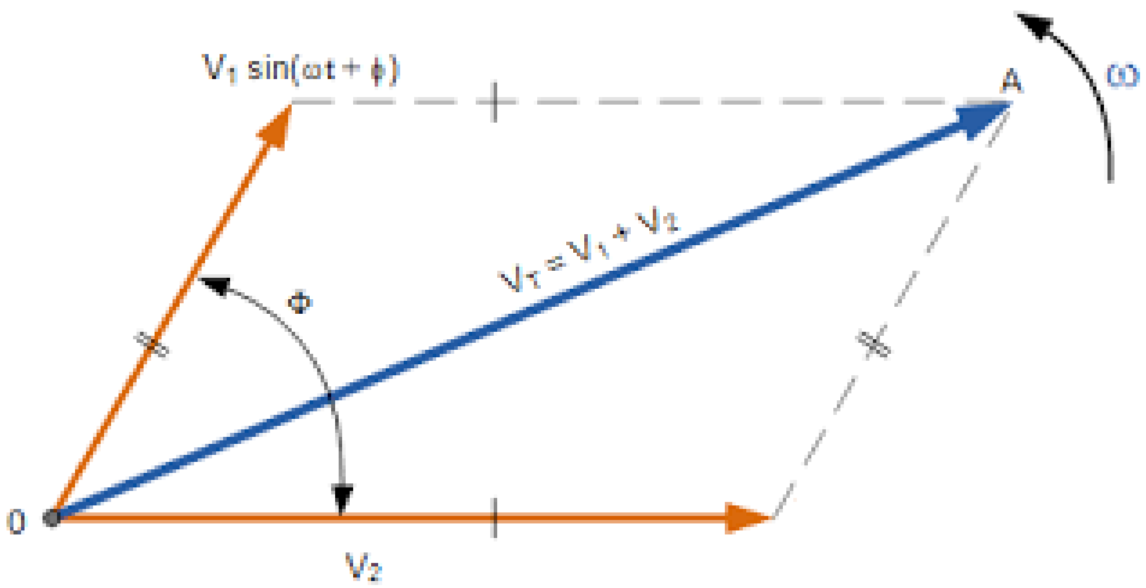
Suponhamos que queiramos obter a onda resultante da superposição de duas ondas individuais, de mesma frequência, com amplitudes A_1 e A_2, com uma diferença de fase ϕ entre elas.

As ondas individuais são representadas pelo diagrama de fasores abaixo:



Observa-se portanto que amplitude resultante genericamente <u>não é igual à soma algébrica das amplitudes individuais</u>.

A amplitude resultante <u>é igual à soma vetorial das amplitudes individuais</u>, observando-se a diferença de fase ϕ entre elas.



A <u>amplitude resultante</u> pode ser calculada utilizando-se a <u>lei dos cosenos</u> da geometria plana:

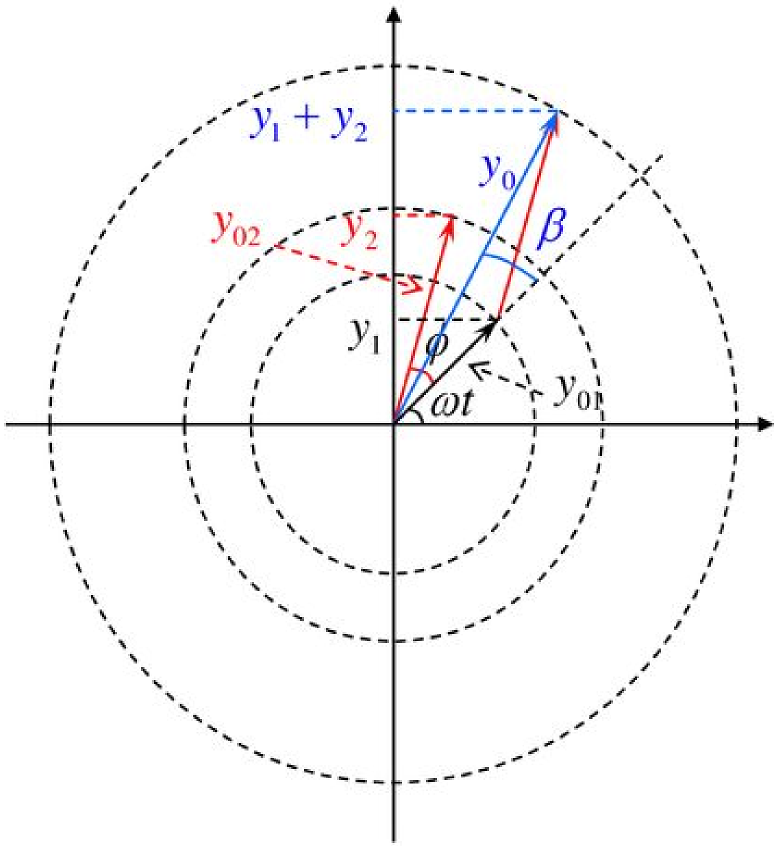
$$y_0^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 \cos(\phi)$$

$$y_1(x,t) = y_{01}\sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x,t) = y_{02}\sin(kx - \omega t + \phi)$$

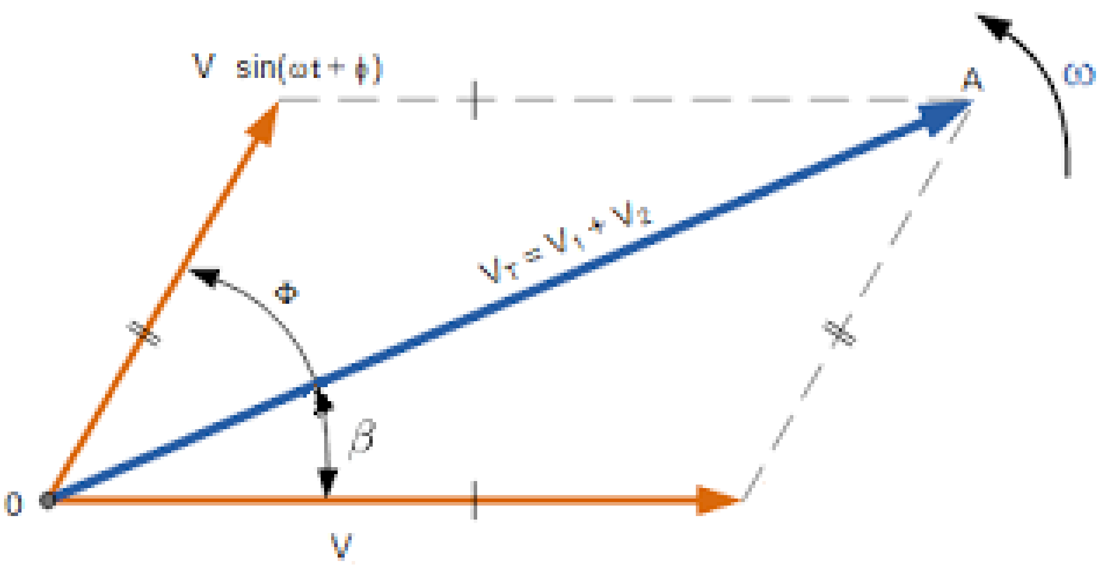
$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

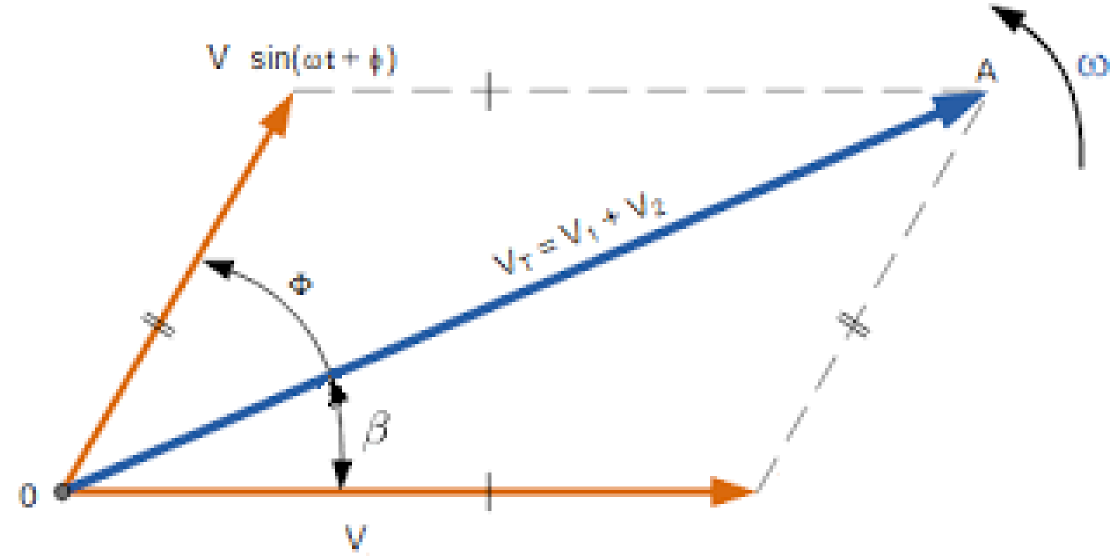
$$= y_0 \sin(kx - \omega t + \beta)$$



Do mesmo modo, pode-se calcular o ângulo β a partir do diagrama de soma de fasores e da lei dos cosenos:

β é o ângulo entre o primeiro fasor e o fasor resultante da soma dos fasores (veja na figura)





Vamos calcular o ângulo de fase resultante, β. Aplicamos a lei dos cosenos ao diagrama acima:

$$y^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2\cos(\phi)$$

$$y_2^2 = y_1^2 + y^2 - 2yy_1\cos(\beta)$$

$$y_2^2 = y_1^2 + (y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2\cos(\phi)) - 2yy_1\cos(\beta)$$

$$y_2^2 = y_1^2 + (y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2\cos(\phi)) - 2yy_1\cos(\beta)$$

cancelamos o termo y_2^2 e isolamos $2yy_1\cos(\beta)$ na expressão acima:

$$2yy_1\cos(\beta) = 2y_1^2 + 2y_1y_2\cos(\phi)$$

$$2\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2\cos(\phi)}\,y_1\cos(\beta) = [2y_1^2 + 2y_1y_2\cos(\phi)]$$

$$2\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2\cos(\phi)}y_1\cos(\beta) = [2y_1^2 + 2y_1y_2\cos(\phi)]$$

"quadramos" a expressão acima:

$$4[y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2\cos(\phi)]y_1^2\cos^2(\beta) = 4y_1^4 + 8y_1^3y_2\cos(\phi) + 4y_1^2y_2^2\cos^2(\phi)$$

Dividimos a expressão anterior por $4y_1^2$:

$$[y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2\cos(\phi)]\cos^2(\beta) = y_1^2 + 2y_1y_2\cos(\phi) + y_2^2\cos^2(\phi)$$

Observe que o termo entre colchetes do lado esquerdo equivale a y^2, logo:

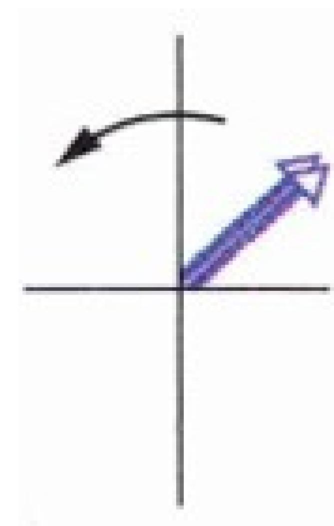
$$y^2\cos^2(\beta) = y_1^2 + 2y_1y_2\cos(\phi) + y_2^2\cos^2(\phi)$$

Finalmente rearranjamos o termo do lado direito da equação e isolamos $\cos(\beta)$:

$$\cos(\beta) = \frac{y_1 + y_2 \cos(\phi)}{y}$$

Vamos examinar alguns casos particulares de diferenças de fase.

<u>Caso I</u>: $\phi = 0$:



Neste caso as duas ondas estão “em fase”, embora elas possam ter amplitudes diferentes. O diagrama ao lado mostra os fasores neste caso.

$$\cos(\beta) = \frac{y_1 + y_2}{y} = \frac{y_1 + y_2}{y_1 + y_2} = 1 \rightarrow \beta = 0$$

Claro que neste caso a amplitude resultante será meramente a soma algébrica das duas componentes (veja o diagrama de fasores), i.e.:

$$A = A_1 + A_2 \text{ (ou } y_1 + y_2\text{)}$$

Logo, a equação da onda resultante será:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A_1 \sin(kx - \omega t) + A_2 \sin(kx - \omega t)$$

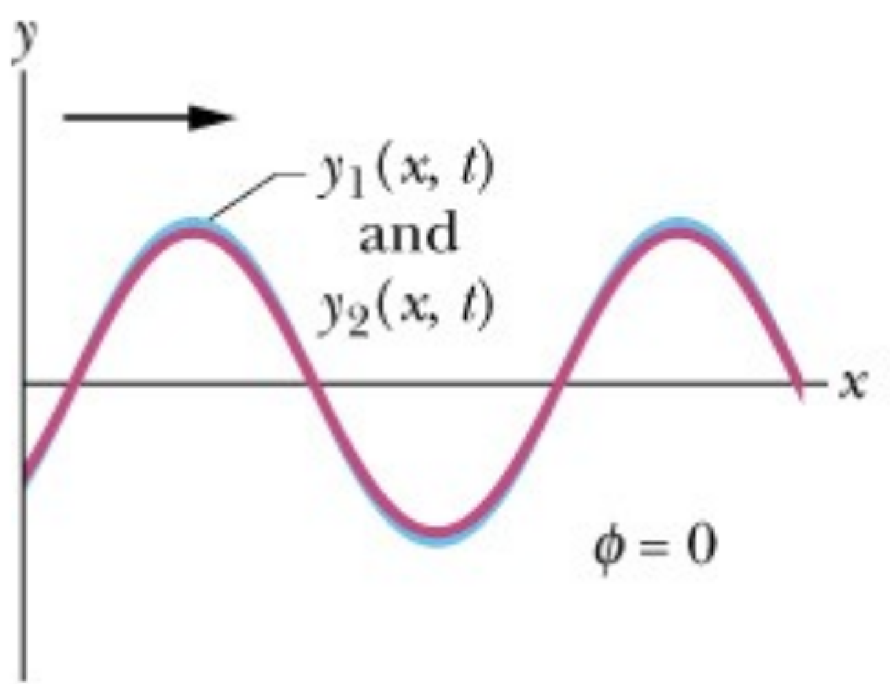
$$y(x,t) = (A_1 + A_2) \sin(kx - \omega t + \beta)$$

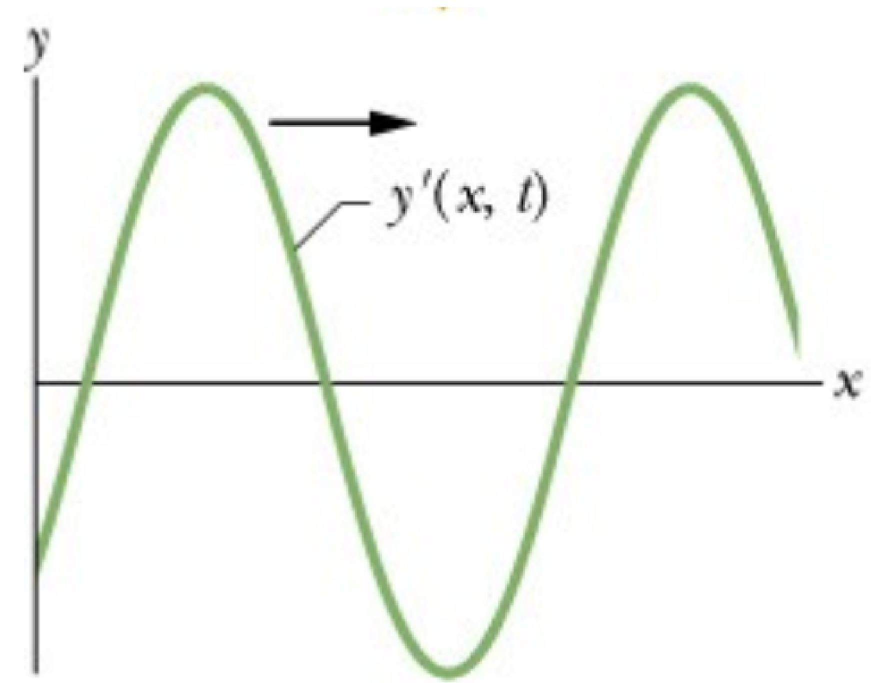
$$y(x,t) = (A_1 + A_2) \sin(kx - \omega t + 0)$$

Logo, a onda “resultante” terá amplitude igual à soma das amplitudes individuais e mesma fase.

O diagrama abaixo ilustra um exemplo de instantâneo dessa onda, para amplitudes iguais.

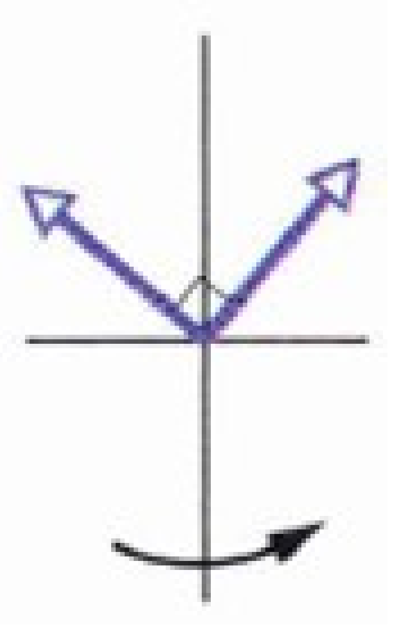
A “onda resultante” está <u>em fase</u> com as demais.





<u>Caso II</u>: $\phi = \pi/2$:

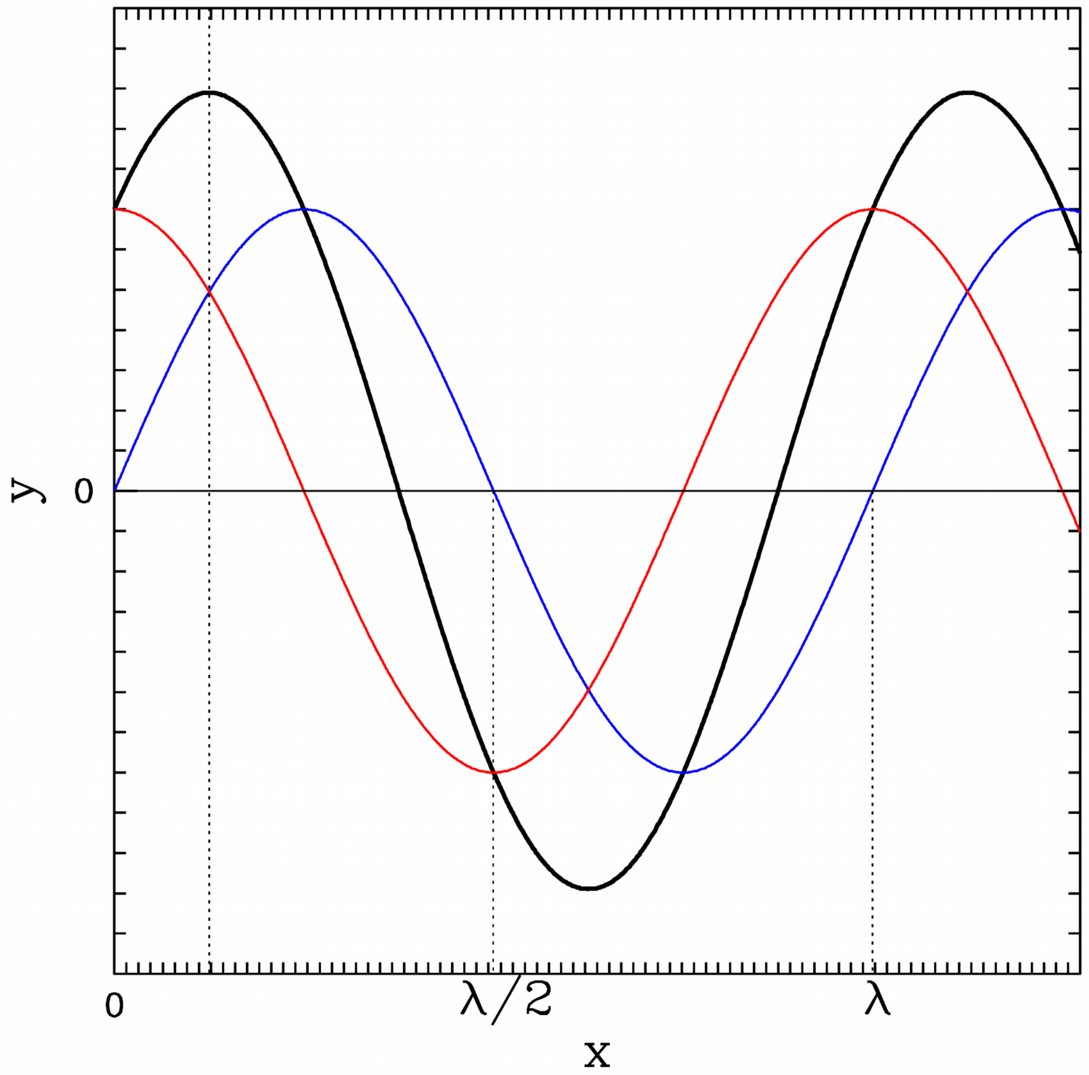
$$\cos(\beta) = \frac{y_1 + 0}{y} = \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$



Neste caso as duas ondas estão “em quadratura”. O diagrama ao lado mostra os fasores neste caso.

As amplitudes podem ser iguais ou diferentes.

O gráfico abaixo ilustra a composição de duas ondas (em azul e vermelho) com diferença de fase $\phi = 90^o$ e mesma amplitude. A onda resultante é mostrada em cor preta.

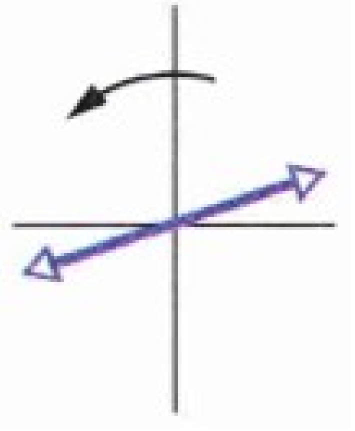


Caso III: $\phi = \pi$:

$$\cos(\beta) = \frac{y_1 - y_2}{|y_1 - y_2|} = \pm 1 \rightarrow \beta = 0, \pi$$

Se $y_1 > y_2$ então cos (β) = +1 → $\beta = 0^o$

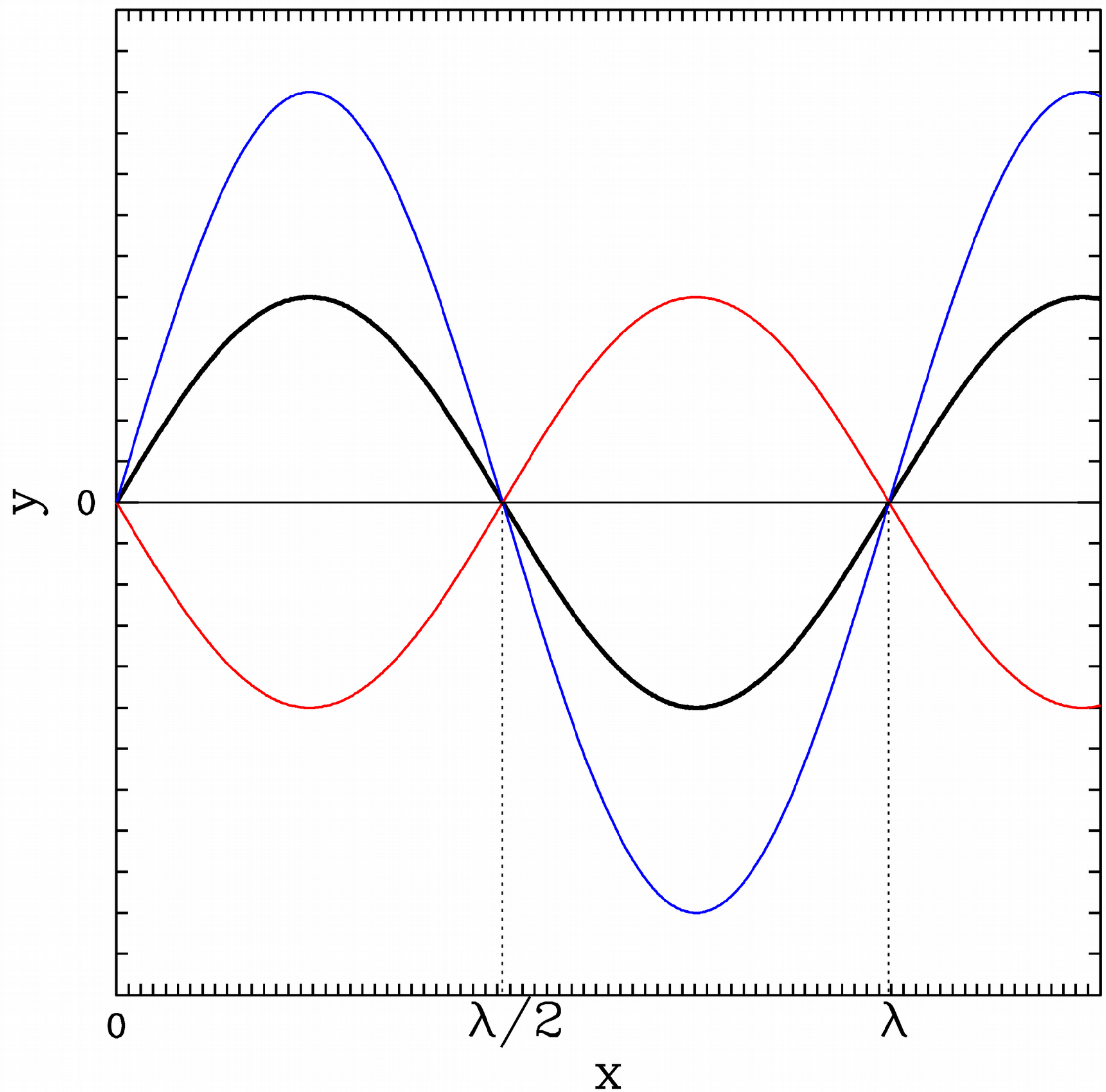
Se $y_1 < y_2$ então cos (β) = –1 → $\beta = 180^o$



Neste caso as duas ondas estão "em contra-fase".

Se as amplitudes individuais de duas ondas forem iguais então a onda resultante será "nula". Chamamos tais casos de <u>interferência destrutiva</u>. O diagrama ao lado mostra uma posição dos fasores neste caso.

O gráfico abaixo ilustra a composição de duas ondas (em azul e vermelho) em “contra-fase”, com amplitudes diferentes. A onda resultante é plotada em cor preta.



Exemplo: determine a equação da onda resultante da composição de duas ondas que se propagam na mesma direção, com igual frequência de 10 Hz, comprimento de onda 20 cm, igual amplitude $A_1 = A_2 = 0{,}7$ m com uma diferença de fase $\phi = \pi/2$.

Sol.: uma vez que sabemos que a diferença de fase é de $\pi/2$, a amplitude da onda resultante pode ser facilmente calculada pela regra de Pitágoras:

$$A^2 = A_1^{\,2} + A_2^{\,2} = 0{,}7^2 + 0{,}7^2 \rightarrow A = 0{,}99 \text{ m}$$

A fase da onda resultante:

$$\cos(\beta) = \frac{y_1 + y_2 \cos(\phi)}{y}$$

$$\cos(\beta) = \frac{0,7 + 0,7\cos(\pi/2)}{0,99} = \frac{0,7}{0,99} = 0,707$$

Portanto $\beta = 45^o$. (ou $\pi/4$ rad)

Calculamos: $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/0{,}20$ m = 31,4 rad/m

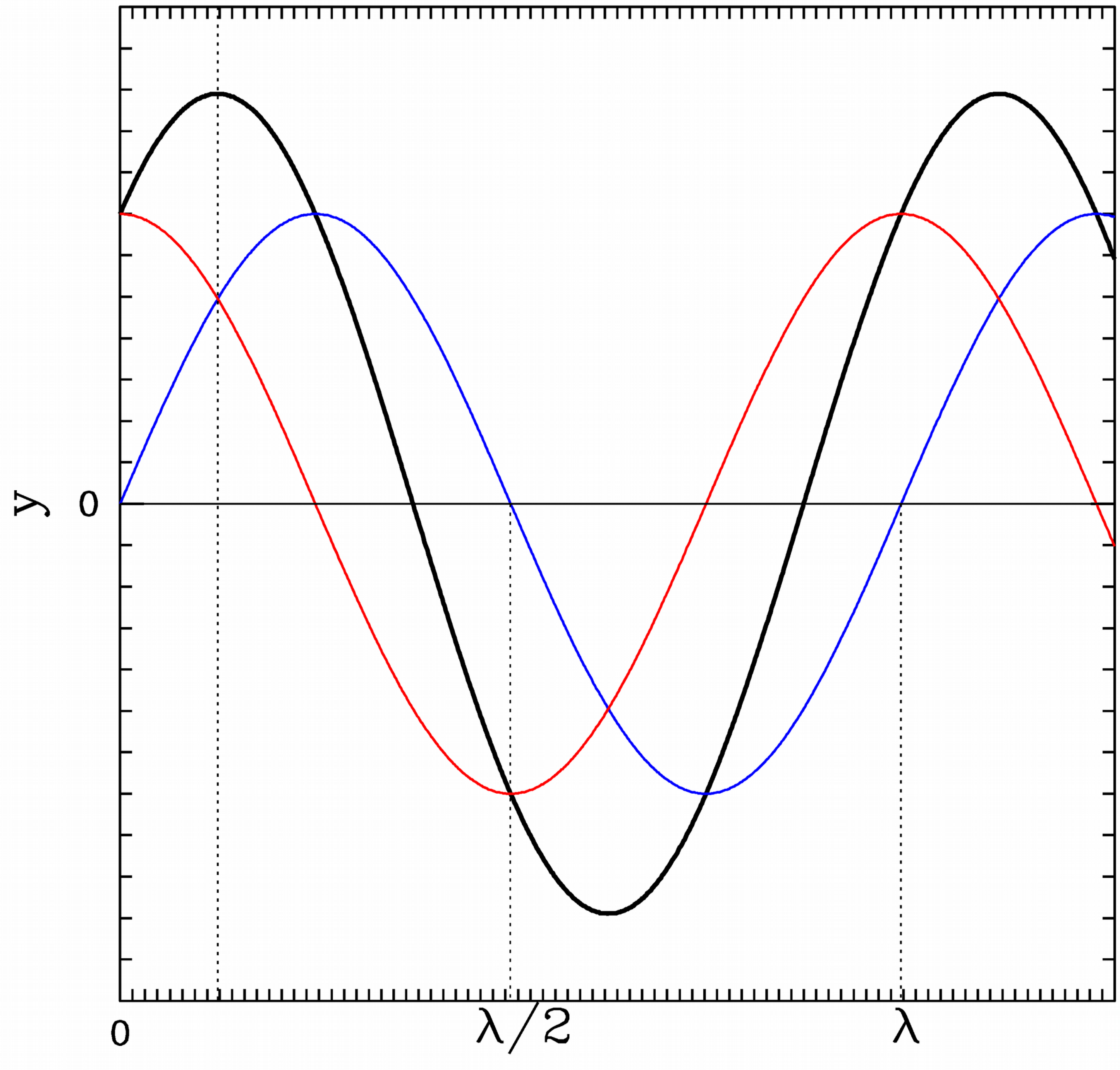
$\omega = 2\pi f = 2\pi 10 = 62{,}8$ rad/s

Temos portanto as seguintes equações de ondas:

$y_1 = 0{,}7 \sin(31{,}4x - 62{,}8t)$

$y_2 = 0{,}7 \sin(31{,}4x - 62{,}8t + \pi/2)$

$y(x,t) = 0{,}99 \sin(31{,}4x - 62{,}8t + \pi/4)$


y
0
0
λ/2
λ
x

Combinação de 2 (ou mais) ondas com diferentes amplitudes e diferentes frequências

Séries de Fourier

- Quando se deseja combinar duas ondas com diferentes frequências o uso de fasores ainda é útil
- Por outro lado, se o número de ondas for grande é melhor somar algebricamente as diferentes funções de onda
- A técnica das Séries de Fourier permite a representação de funções diversas pela soma de uma série infinita de funções periódicas i.e. senos e cosenos
- Quanto mais termos são utilizados, melhor a função desejada é representada

Uma função f(x) pode ser representada pela seguinte série (soma) de funções:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi}{T} nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi}{T} nx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\tau} f(x) \cos \frac{2\pi}{T} nx \; dx, \;\; n = 0, 1, 2..$$

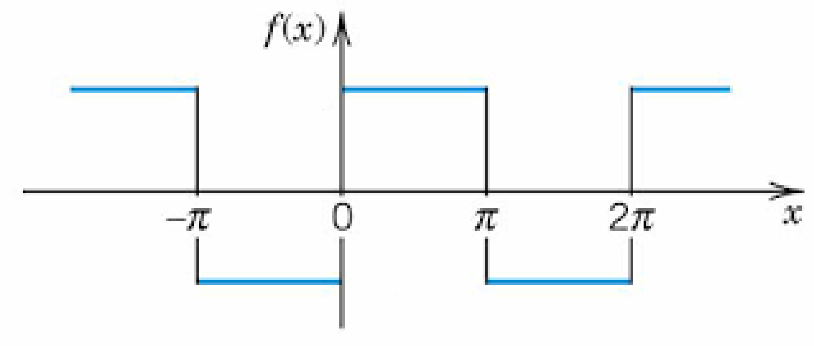
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\tau} f(x) \sin \frac{2\pi}{T} nx \; dx, \;\; n = 1, 2, ..$$

Onde a_0 é o valor médio da função e o intervalo de integração se dá no período da função

Exemplo: represente como uma série de Fourier a onda quadrada:

f(x) = +5 [0;π]

–5 [π;2π]

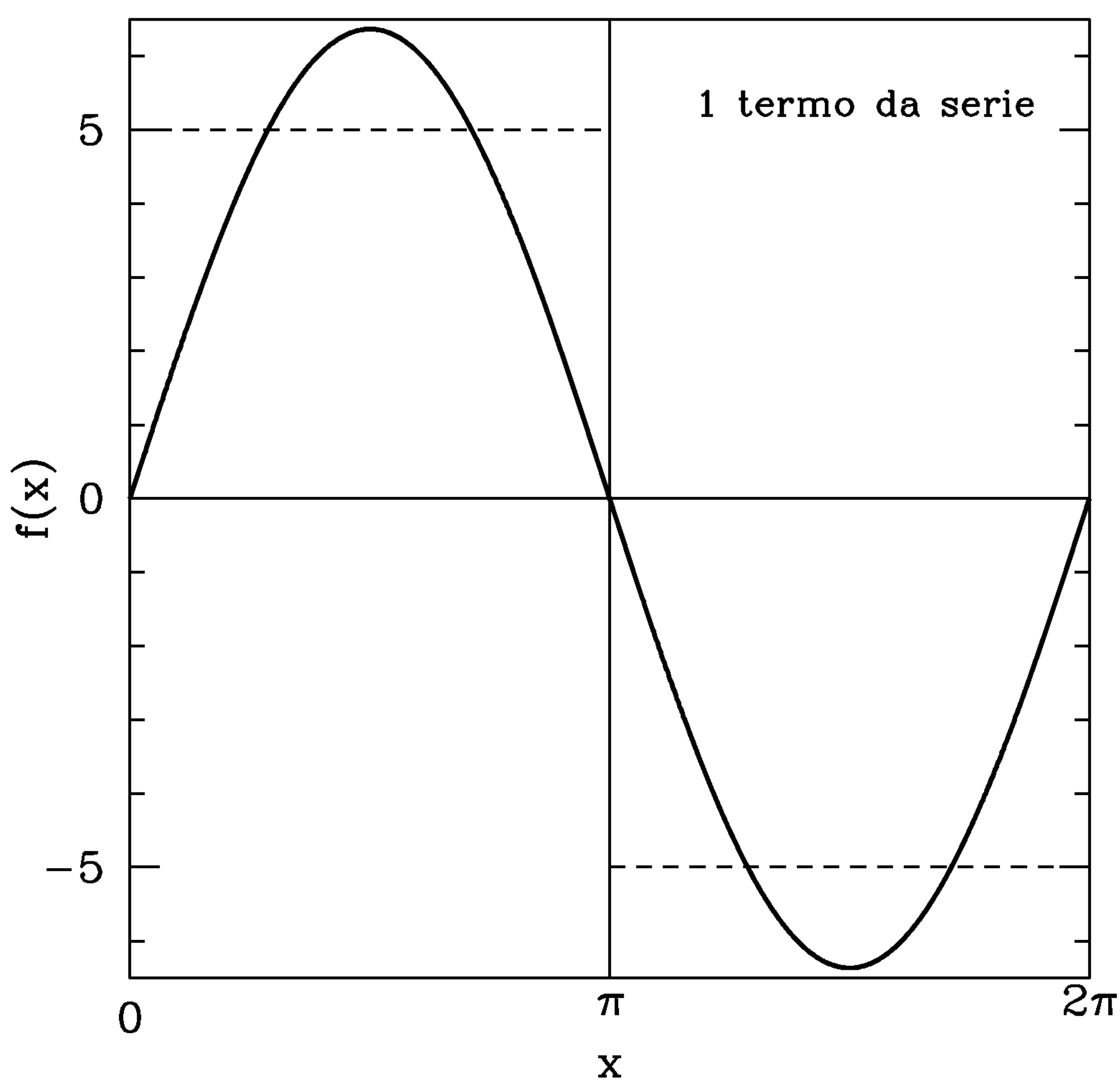


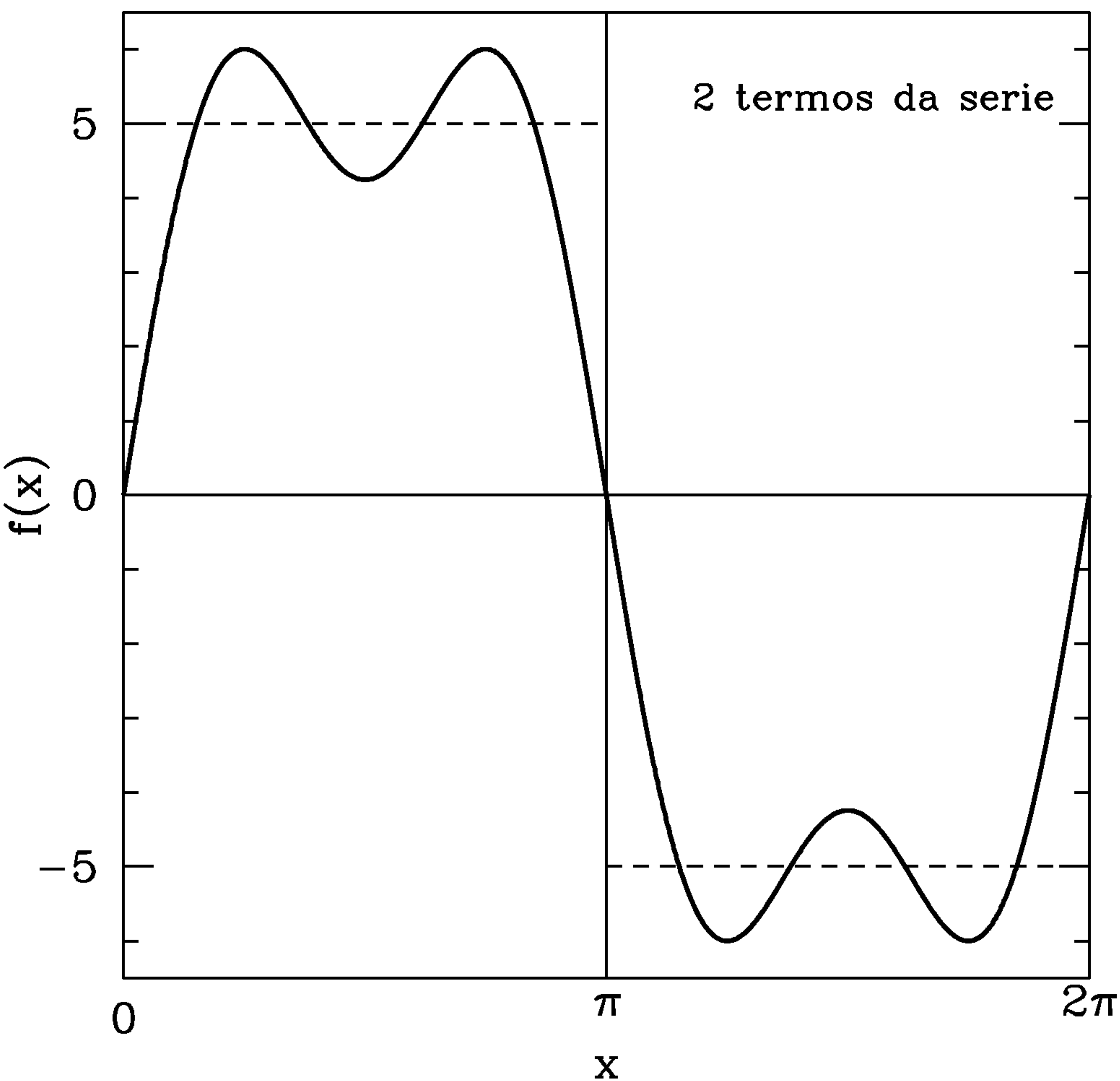
Sol.: o cálculo das integrais dá:

$a_0 = 0$

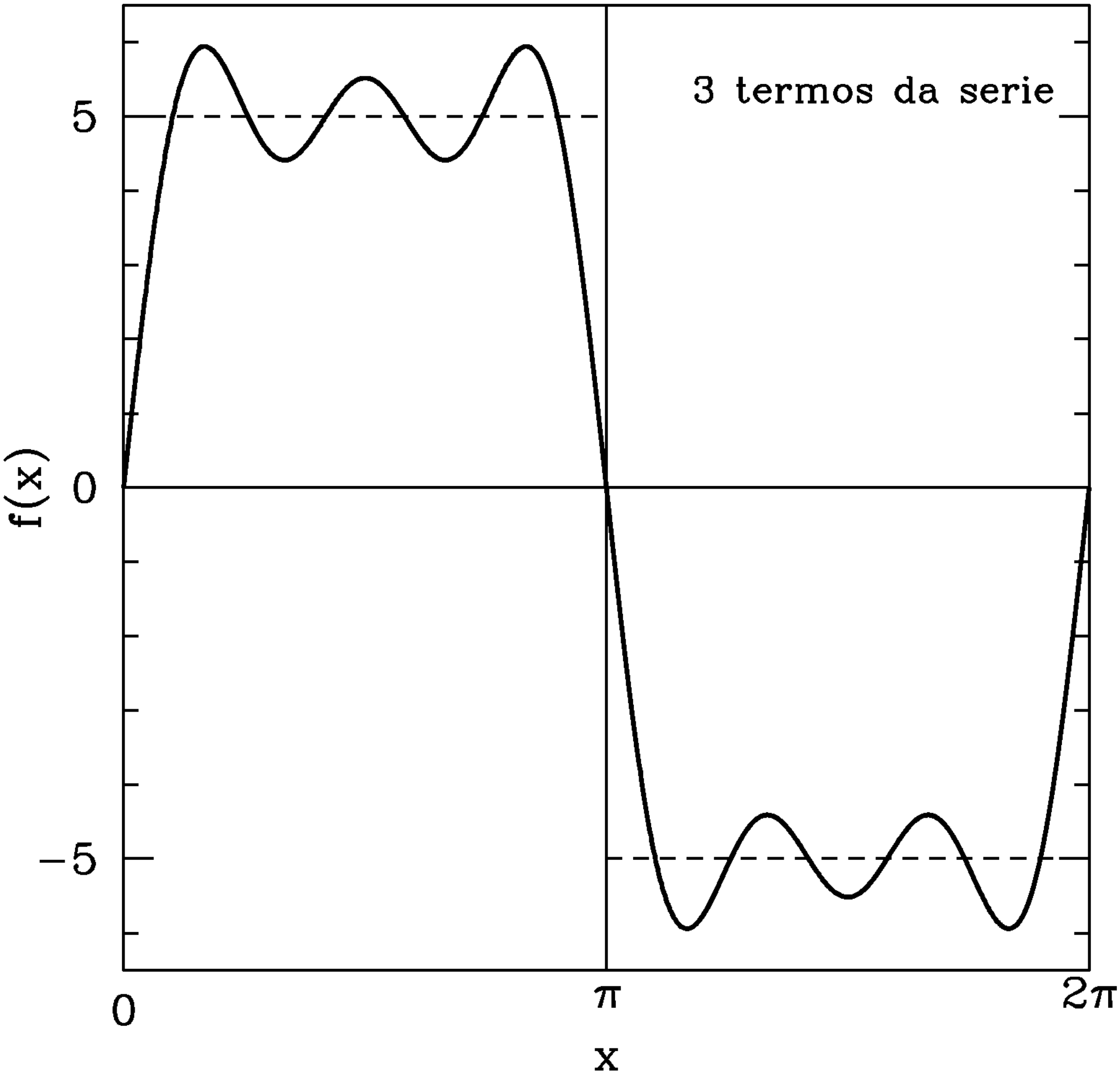
$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 \ldots = 0$ (pois a função é ímpar)

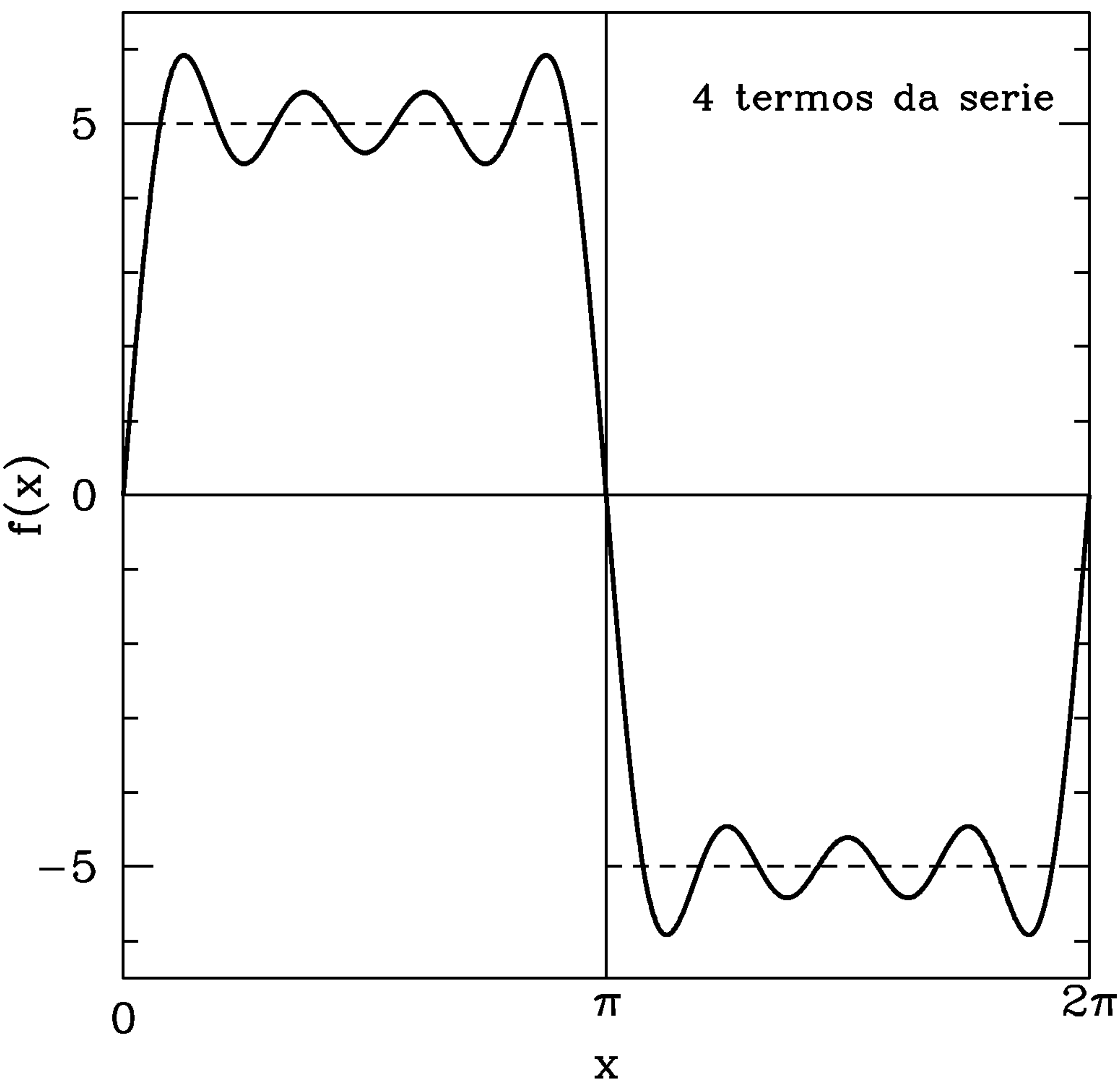
$f(x) = 0 + (20/\pi)\sin(x) + (20/3\pi)\sin(3x) + (20/5\pi)\sin(5x) + (20/7\pi)\sin(7x) + (20/9\pi)\sin(9x) + (20/11\pi)\sin(11x) \ldots$


1 termo da serie
5
0
−5
f(x)
0
π
2π
x

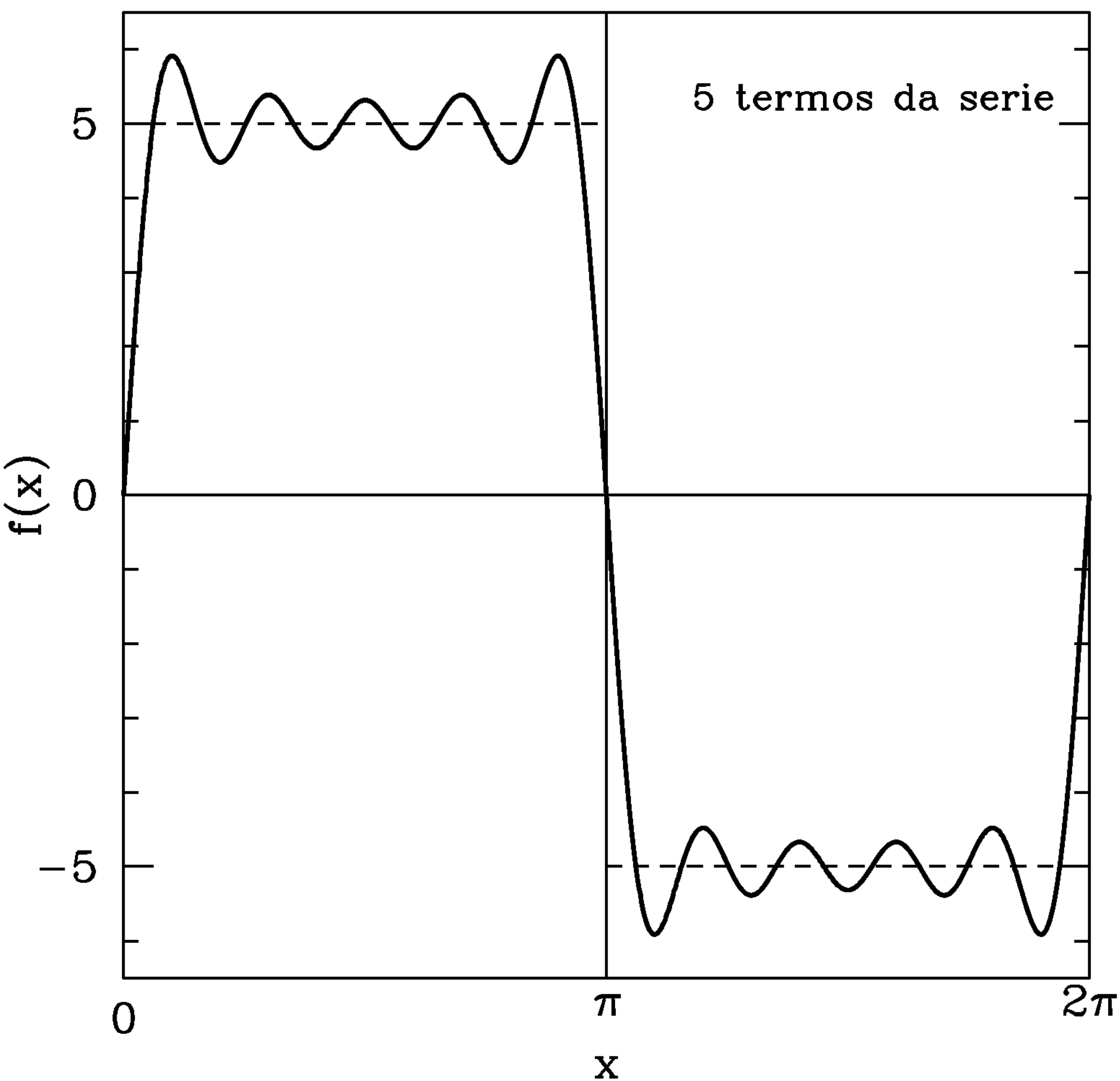


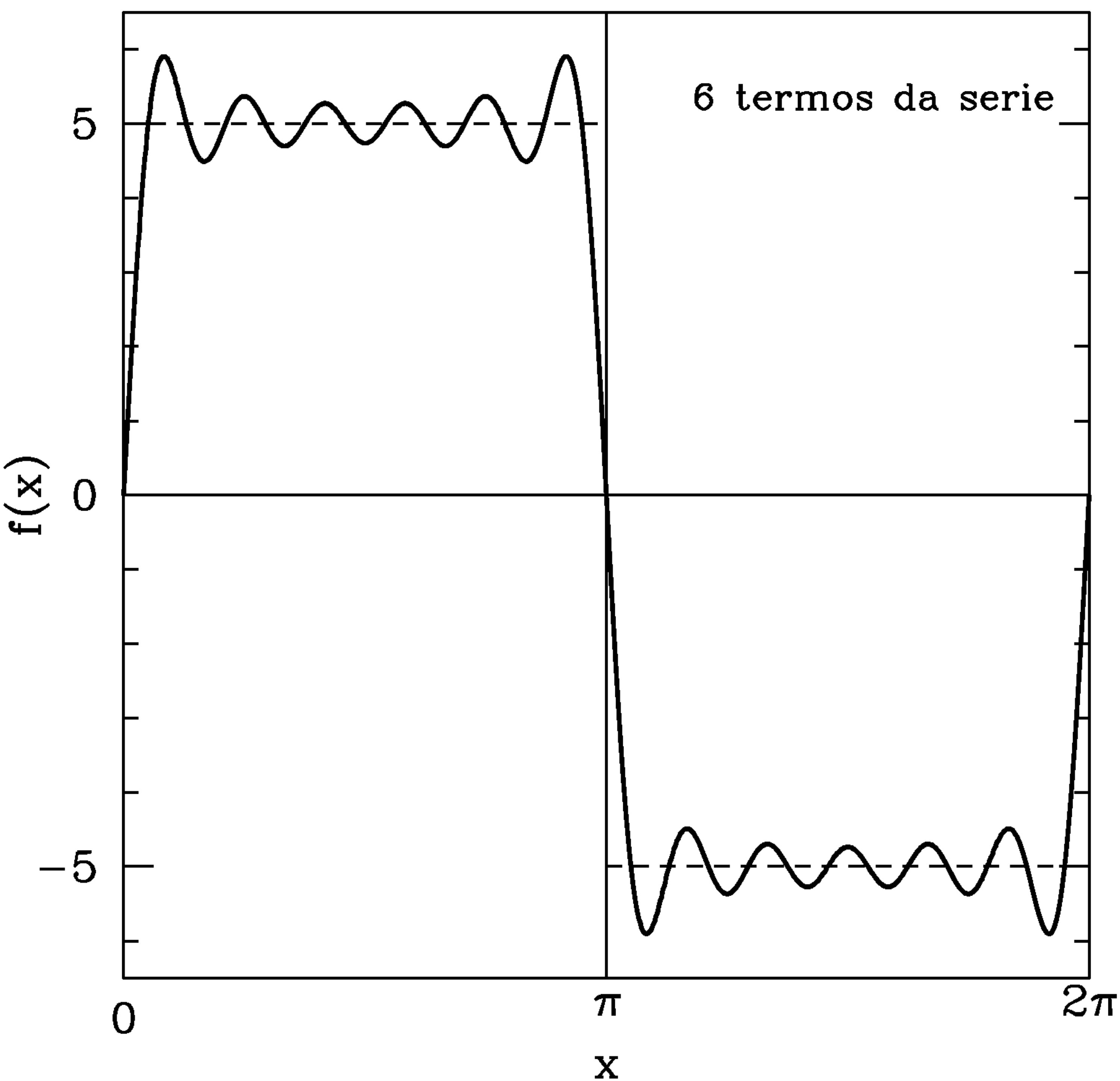
2 termos da serie
5
0
−5
f(x)
0
π
2π
x


3 termos da serie
f(x)
5
0
−5
0
π
2π
x

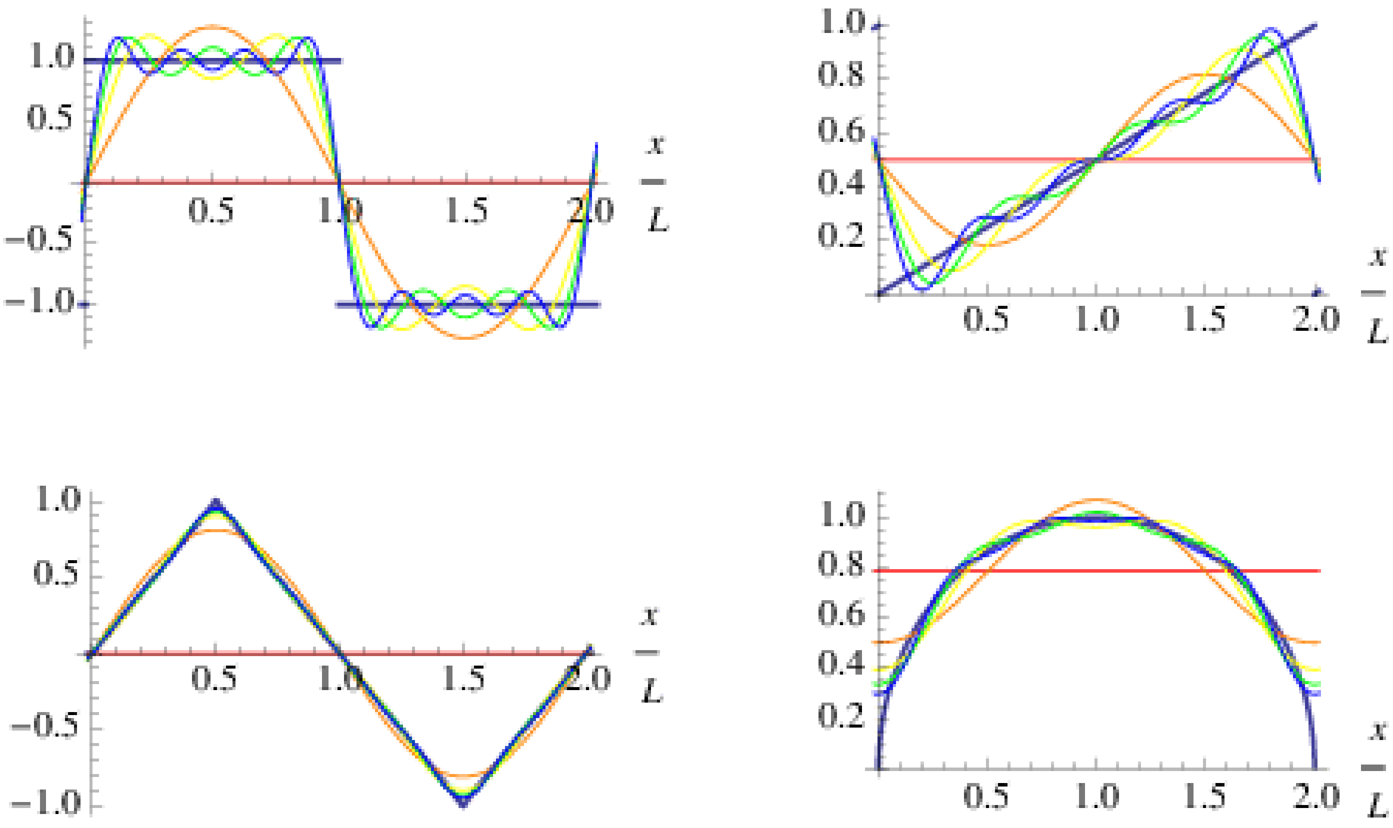


4 termos da serie
5
0
−5
f(x)
0
π
2π
x


5 termos da serie
5
0
−5
f(x)
0
π
2π
x


6 termos da serie
5
0
−5
f(x)
0
π
2π
x

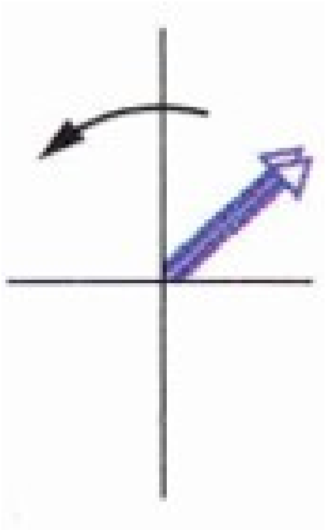
Outros exemplos:



Combinação de 2 ondas com frequências diferentes

Um caso interessante é quando se combinam duas ondas com frequências diferentes

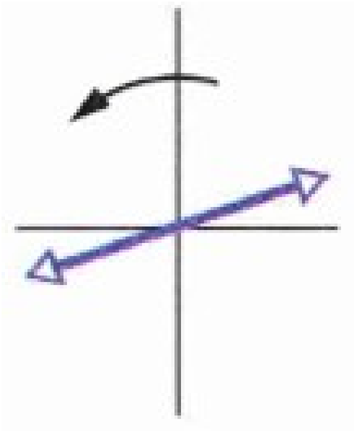
O diagrama de fasores mostra que a amplitude da onda resultante varia entre:



$$A_{max} = A_1 + A_2$$

e

$$A_{min} = |A_1 - A_2|$$



A <u>diferença de fase</u> entre as duas ondas <u>é variável</u> no tempo, entre 0 e π

Cálculo da frequência da modulação

O valor da onda no eixo-y varia conforme as funções:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega_1 t)$$
$$y_2 = A_2 \sin(\omega_2 t)$$

Suponhamos, para simplificar, que $A_1 = A_2$

$$y = y_1 + y_2 = A\,[\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)]$$

Podemos utilizar a identidade trigonométrica:

$$y(\mathrm{t}) = 2A \cos[\,½\,(\omega_1 - \omega_2)t]\,\sin[\,½\,(\omega_1 + \omega_2)t]$$

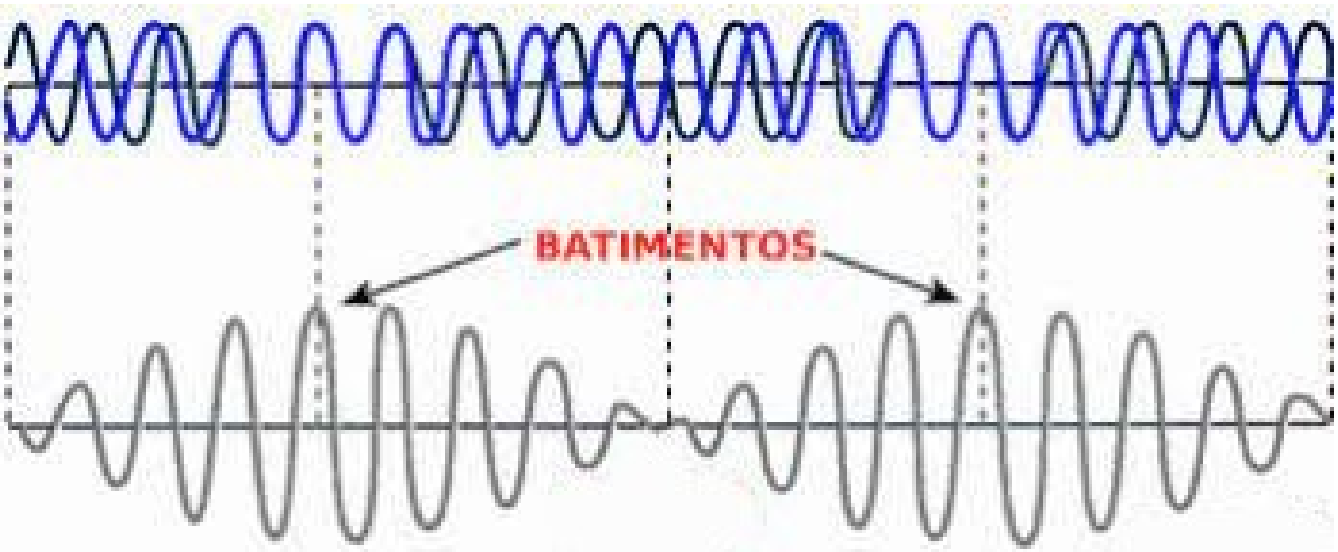
$$y(t) = 2A \cos[\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t] \sin[\tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t]$$

O primeiro termo dá a modulação da amplitude

O segundo termo dá a frequência da onda resultante

A frequência da modulação = ½ (diferença das frequências)

A frequência resultante = média das frequências


BATIMENTOS

Fim