

Ondas transversais em uma dimensão

Roberto Ortiz

Professor Livre-Docente
EACH – USP

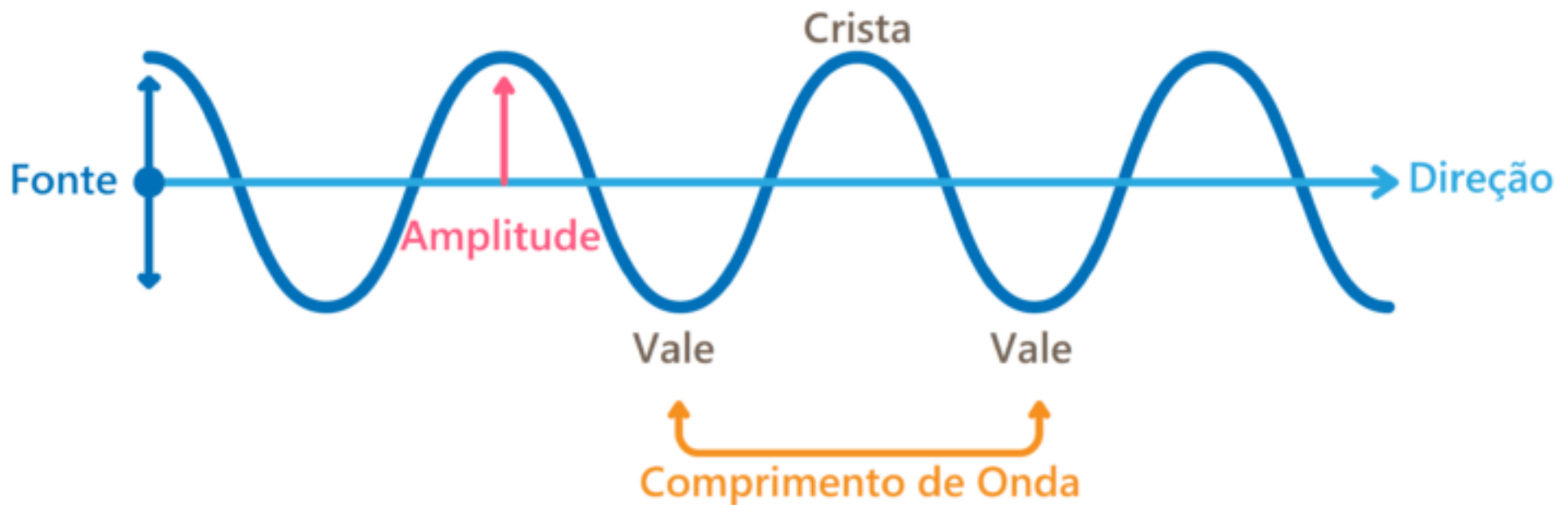
O que são ondas?

- Uma onda é uma oscilação que se propaga em um meio material
- Quando a oscilação ocorre no sentido perpendicular ao sentido de propagação ela é dita transversal
- Assim como as oscilações (já estudadas), ondas têm uma amplitude, que é a amplitude de oscilação das partículas do meio.
- Estudaremos aqui as ondas periódicas, porém muitas propriedades mencionadas aqui servem também às ondas não-periódicas.

- Para saber se uma onda é transversal:
 - Observe o movimento das partículas do meio onde ela se propaga
 - Se o movimento das partículas for perpendicular à velocidade da onda então a onda é transversal
 - Exemplo: ondas em uma corda esticada
- Para saber se uma onda é periódica:
 - Meça o tempo entre a passagem de duas ondas sucessivas por um determinado ponto.
 - Esse tempo é constante em ondas periódicas e é chamado de período da onda (T), geralmente medido em segundos
 - O inverso do período é a frequência da onda ($f = 1/T$), geralmente medido em Hertz (Hz)

Ondas periódicas

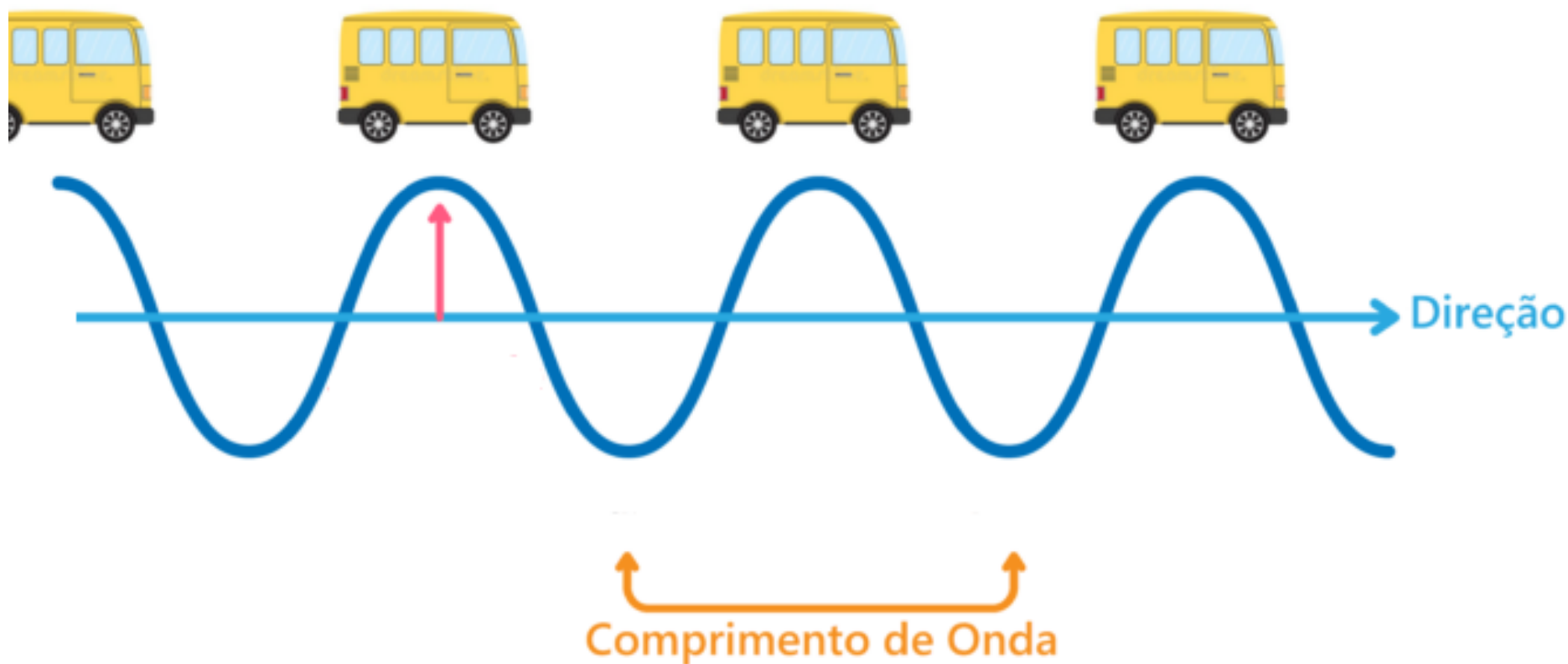
- A figura abaixo ilustra os principais parâmetros de uma onda periódica.
- A amplitude e o comprimento de onda geralmente são medidos em metros (S.I.)



Relação entre os parâmetros de uma onda periódica

- Vamos estabelecer intuitivamente a relação entre alguns dos parâmetros de uma onda periódica, isto é: seu período, frequência, velocidade e comprimento de onda.
- Suponha que você esteja em um ponto, observando os ônibus que passam, à velocidade constante, 60 km/h.
- Qual é a velocidade dos ônibus, em km/min?

- Se um ônibus passa a cada 20 minutos, qual é a frequência dos ônibus, em “ônibus/hora”?
- Qual é a distância entre dois ônibus sucessivos?



Relação entre as quantidades:

- A frequência (f) dos ônibus é o inverso do período:

$$T = 20 \text{ min} = 1/3 \text{ hora} \rightarrow f = 1/T = 1/(1/3) =$$

$f = 3 \text{ ônibus/hora}$

- A distância entre dois ônibus sucessivos é, por analogia, o comprimento de onda (λ). Calcula-se a distância entre dois ônibus sucessivos:

$$\lambda = V \times T = 1 \text{ km/min} \times 20 \text{ min}$$

$\lambda = 20 \text{ km}$

Se multiplicarmos a frequência pelo comprimento de onda teremos:

$$\lambda \times f = 20 \text{ km} \times 3/\text{hora} = 60 \text{ km/h}$$

Logo, temos a relação válida para qualquer onda periódica:

$$\lambda \times f = V$$

Onde λ é o comprimento de onda, f é a frequência e V é a velocidade da onda.

A relação entre o período, frequência e frequência angular é:

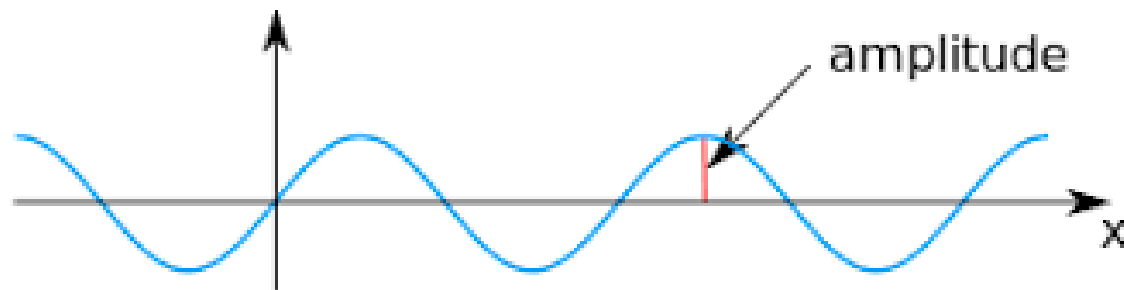
$$\omega = 2\pi f = 2\pi / T$$

Equação de uma onda harmônica em uma dimensão

Suponhamos inicialmente uma onda harmônica estática. A posição y de uma partícula é dada pela função:

$$y = A \sin (\phi)$$

Onde A é a amplitude e ϕ é a fase da onda (seno), no ponto x . Portanto, neste caso ϕ é uma função de x .



Vamos descobrir qual é a fase ϕ de um dado ponto x .

O número de ciclos N no ponto x é dado por:

$$N = (x / \lambda)$$

Como cada ciclo equivale a uma fase de 2π temos que a fase ϕ no ponto x é:

$$\phi = 2\pi (x / \lambda)$$

Logo, a equação de uma onda estática é:

$$y(x) = A \sin (\phi) = A \sin (2\pi x / \lambda)$$

Às vezes a razão $2\pi / \lambda$ é chamada de número de onda angular (k)

A unidade de k é o radiano/metro

Não confundir com a constante elástica $k = F / x$

Utilizando a notação acima, temos a equação da onda estática:

$$y(x) = A \sin(\phi) = A \sin(kx)$$

Suponhamos agora que a onda caminhe na direção positiva de x .

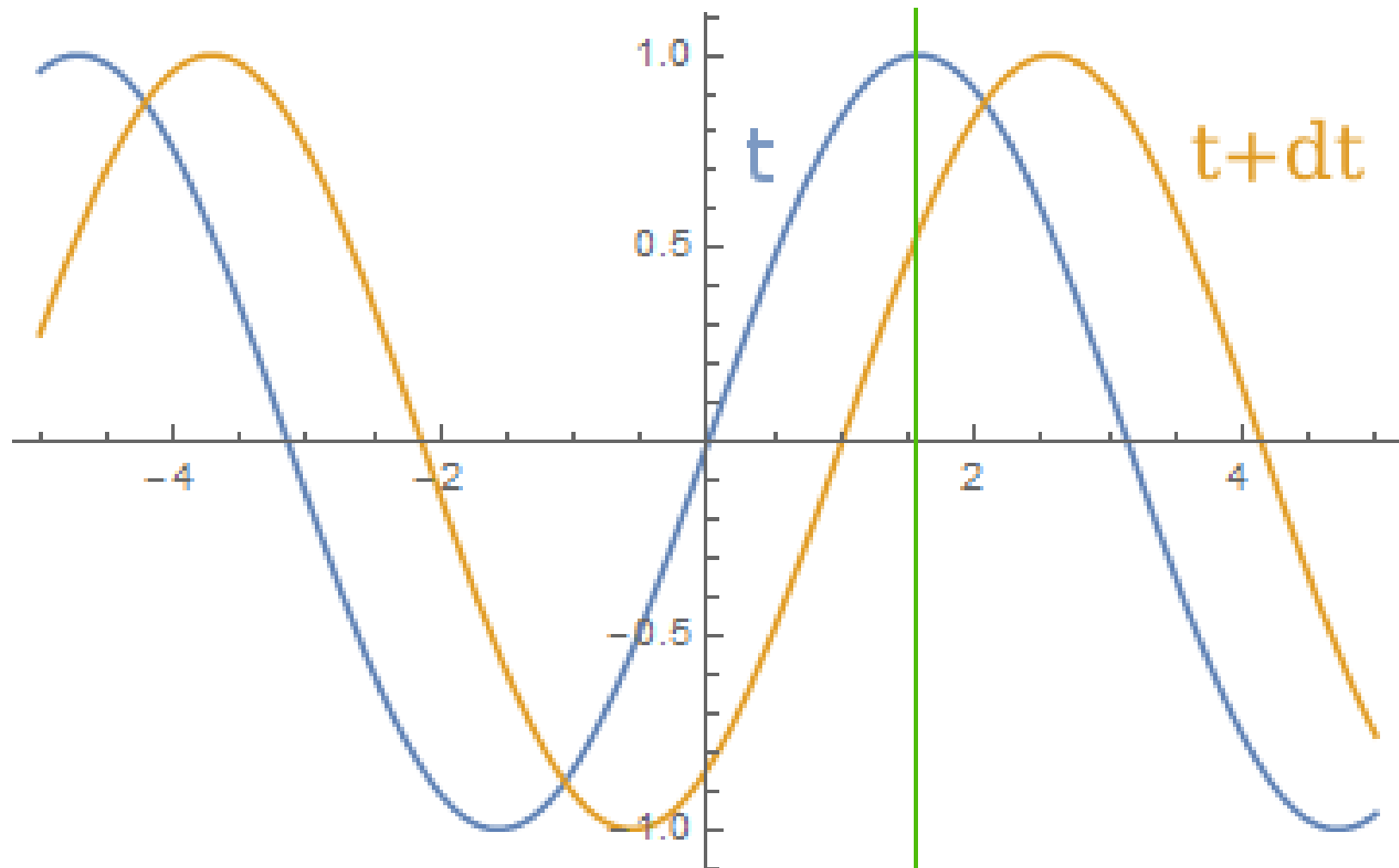
Após um determinado tempo t , a fase da onda no ponto x terá se alterado.

Pergunta:

Neste caso, a fase aumenta ou diminui?

A figura abaixo ilustra uma onda que se move para a direita.
Compare a fase da onda em $x = 1,6$ m (linha verde) no instante t e no instante $t+dt$.

A fase **aumentou** ou **diminuiu**?



Logo, para uma onda que se propaga na direção de **x positivo** a fase ϕ **diminui** com o tempo para um dado x ,
fixo.

Quanto diminui a fase da onda em função do tempo t ?

$$\Delta\phi = \omega t = (2\pi / T) t$$

Logo, a equação da onda transversal é:

$$y(x,t) = A \sin (2\pi x / \lambda - \omega t)$$

ou

$$y(x,t) = A \sin (k x - \omega t)$$

Obs: se a onda se propagar em direção de x negativo então:

$$y(x,t) = A \sin (k x + \omega t)$$

Movimento de uma onda para um determinado x , fixo

Vamos analisar o movimento da onda para um determinado x particular: x_p

$$y(x_p, t) = A \sin (k x_p - \omega t)$$

Note que, neste caso, y é uma função apenas do tempo t :

$$y(x_p, t) = A \sin (cte. - \omega t)$$

ou

$$y(x_p, t) = A \sin (\delta - \omega t)$$

Que é semelhante à equação do movimento ondulatório.

Movimento de uma onda para um determinado x_p , fixo

A equações da velocidade e da aceleração são obtidas derivando-se a equação da posição $y(x_p, t)$

$$v_y(x_p, t) = \frac{dy}{dt} = -\omega A \cos(\delta - \omega t)$$

$$a_y(x_p, t) = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\delta - \omega t)$$

$$a_y(x_p, t) = -\omega^2 y(x_p, t)$$

- Note que obtivemos a mesma equação diferencial que obtivemos antes, de oscilações harmônicas.
- Logo, cada partícula que compõe o meio de propagação executará uma oscilação harmônica na direção y
- Aplica-se a este movimento os conceitos já estudados sobre oscilações harmônicas, tais como: amortecimento, oscilações forçadas, constante elástica, etc.

A velocidade de propagação de uma onda transversal

- Depende das propriedades do meio: temperatura, densidade, rigidez, etc.
- A velocidade de propagação está implícita na equação da onda:

$$\frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\frac{\omega}{k} = 2\pi f \frac{\lambda}{2\pi} = f\lambda = v$$

Exercício: Uma onda senoidal progressiva é descrita no S.I. por:

$$y(x,t) = 0,00327 \sin (72,1x - 2,72 t)$$

- (a) qual é a amplitude desta onda?
- (b) quais são o comprimento de onda?
- (c) qual é o período?
- (d) qual é a frequência desta onda?
- (e) qual é a velocidade de propagação desta onda?

Sol.: comparamos a equação acima com a equação geral de uma onda transversal progressiva e identificamos os termos em comum:

$$y(x,t) = A \sin (k x - \omega t)$$

(a) a amplitude: $A = 0,00327 \text{ m} = 0,00327 \times 1000 \text{ mm}$

$$A = 3,27 \text{ mm}$$

(b) o comprimento de onda: $k = 2\pi/\lambda = 72,1 \rightarrow \lambda = 2\pi/k$

$$\lambda = 2\pi / 72,1 = 0,0871 \text{ m} = 8,71 \text{ cm}$$

(c) o período: $\omega = 2\pi/T \rightarrow T = 2\pi/\omega = 2\pi/2,72 = 2,31 \text{ s}$

(d) a frequência: $f = 1/T = 1/2,31 = 0,433 \text{ Hz}$

(e) a velocidade: $v = \omega/k = 2,72 \text{ (rad/s)}/72,1 \text{ (rad/m)} = 0,0377 \text{ m/s} = 3,77 \text{ cm/s}$

Fim